

# 鋼骨梁-柱構件之檢驗-AISC 有效長度法與直接分析法

◎高碩亨<sup>1</sup>、呂東苗<sup>2</sup>

## 前言

梁-柱構件係指同時受到軸力和彎矩作用之構件，在結構系統中梁柱構件會因承受巨大軸力致產生撓曲變形造成在軸力和端點彎矩上之不利變化。為了確保構件的安全，必須使用較合理的分析去評估其安全性。由於梁-柱同受到軸力和彎矩的特性，因此梁-柱構件的二次效應(非線性行為)必須給予合理考慮。本研究針對 AISC (1986、1994、1999、2005、2010)提供公式，探討梁柱構件的演進與評估方法，根據過去的研究了解 AISC 對梁-柱的使用與限制。梁-柱構件在有側位移和無側位移分析上，對一次彎矩和二次彎矩的相關係數( $B_1, B_2, P_{nt}, P_{lt}, P_{e1}, P_{e2}$ )做較深入的探討。本研究提供示範例題以說明 AISC 之分析，提供業界工程師設計參考。

梁-柱構件在 AISC-LRFD 規範中的互動公式：

$$\text{當 } P_r/P_c \geq 0.2, \quad \frac{P_r}{P_c} + \frac{8}{9} \left( \frac{M_{rx}}{M_{cx}} + \frac{M_{ry}}{M_{cy}} \right) = pP_r + b_x M_{rx} + b_y M_{ry} \leq 1.0$$

$$\text{其中 } p = \frac{1}{P_c}, \quad b_x = \frac{8}{9M_{cx}} = \frac{8}{9\phi_b M_{nx}}, \quad b_y = \frac{8}{9M_{cy}} = \frac{8}{9\phi_b M_{ny}}$$

$$\text{當 } P_r/P_c < 0.2, \quad \frac{P_r}{2P_c} + \left( \frac{M_{rx}}{M_{cx}} + \frac{M_{ry}}{M_{cy}} \right) = \frac{1}{2} pP_r + \frac{9}{8} (b_x M_{rx} + b_y M_{ry}) \leq 1.0$$

$$\text{其中 } p = \frac{1}{P_c}, \quad b_x = \frac{8}{9M_{cx}} = \frac{8}{9\phi_b M_{nx}}, \quad b_y = \frac{8}{9M_{cy}} = \frac{8}{9\phi_b M_{ny}}$$

$p$ 、 $b_x$ 和  $b_y$  可以利用 AISC-LRFD 設計手冊查表得知。

例題 1：使用 1986、1994、1999、2005 AISC-LRFD 規範中的有效長度法 檢驗梁-柱構件有一單跨多層(single-bay multistory)無支撐結構系統(部分結構如圖 1 所示)。在此結構系統中底層柱子 AB、CD(已知斷面為 A992 W14×145 型鋼， $F_y = 50$  ksi) 承受軸向載重  $P$  與水平風力  $H$  作用如圖 1 所示。請利用 AISC-LRFD 有效長度法(Effective Length Method)檢驗柱子 AB、CD 在此單跨多層無支撐結構系統中之接受性。假設柱子  $y$ -方向之頂部與底部是鉸支撐。

<sup>1</sup> 中興大學土木工程系 研究生

<sup>2</sup> 中興大學土木工程系 教授

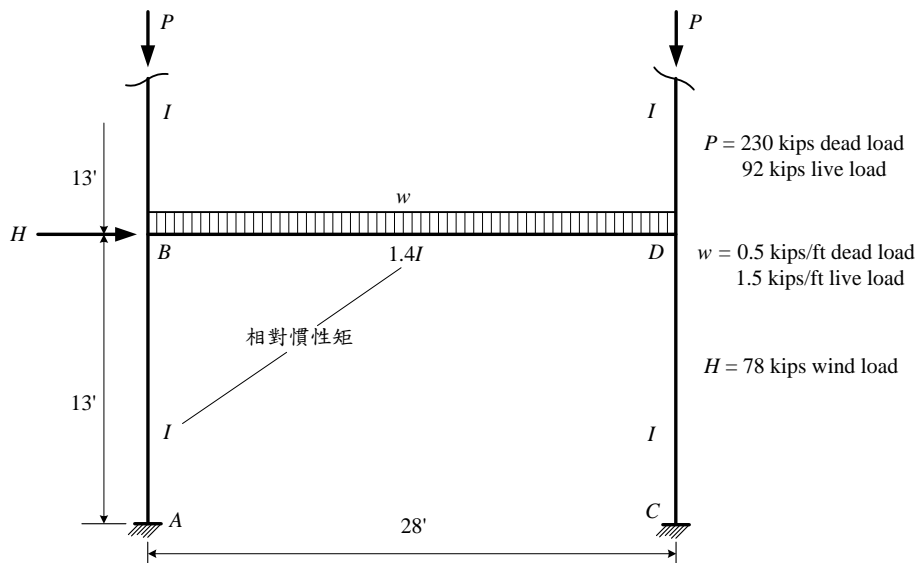


圖 1 單跨多層無支撐結構系統

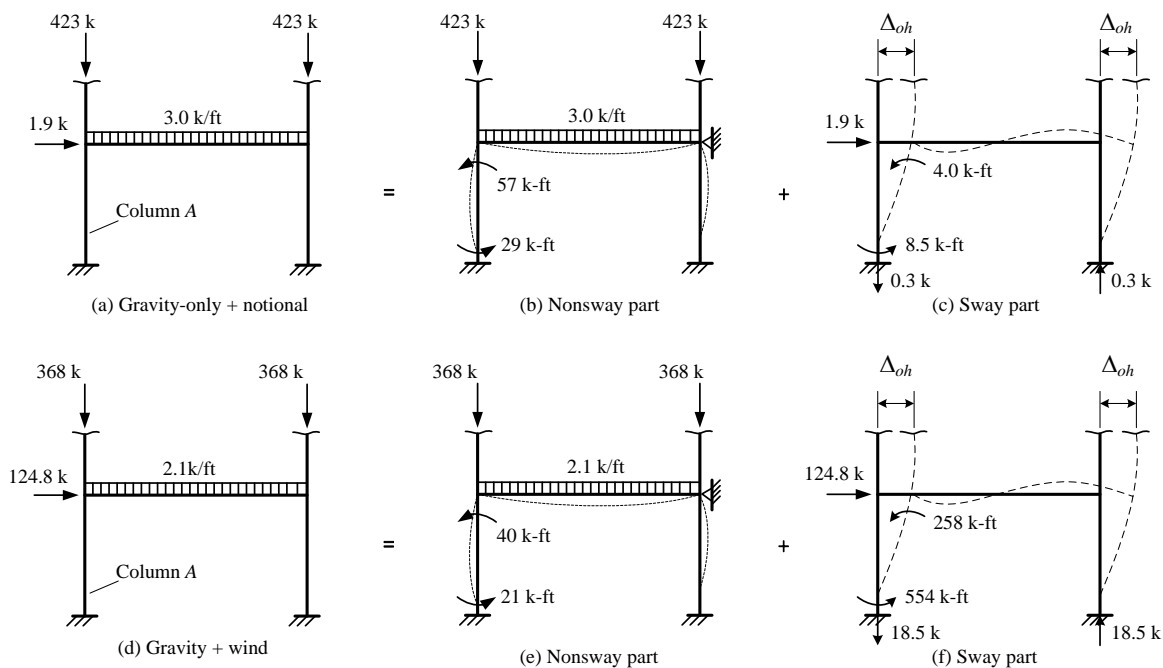


圖 2 一次彈性分析下之受力分佈

解： W14×145 (2005 AISC / P.1-20)

$A = 42.7 \text{ in}^2$ ,  $d = 12.8 \text{ in}$ ,  $t_w = 0.68 \text{ in}$ ,  $b_f = 15.5 \text{ in}$ ,  $t_f = 1.09 \text{ in}$ ,  $b_f/2t_f = 7.11$ ,  $h t_w = 16.8$ ,

$S_x = 232 \text{ in}^3$ ,  $I_x = 1710 \text{ in}^4$ ,  $r_x = 6.33 \text{ in}$ ,  $r_y = 3.98 \text{ in}$ ,  $Z_x = 260 \text{ in}^3$

使用 ASCE 7-05 P.5 / LRFD 載重組合：

1.  $1.4(D + F)$

2.  $1.2(D + F + T) + 1.6(L + H) + 0.5(L_r \text{ or } S \text{ or } R)$

$$3. 1.2D + 1.6(L_r \text{ or } S \text{ or } R) + ((0.5 \text{ or } 1.0)^*L \text{ or } 0.8W)$$

$$4. 1.2D + 1.6W + (0.5 \text{ or } 1.0)^*L + 0.5(L_r \text{ or } S \text{ or } R)$$

$$5. 1.2D + 1.0E + (0.5 \text{ or } 1.0)^*L + 0.2S$$

$$6. 0.9D + 1.6W + 1.6H$$

$$7. 0.9D + 1.0E + 1.6H$$

當風力或地震力作用在結構上時至少兩個載重因子的組合是必要的。

$$1. \text{ 重力載重 } \Rightarrow 1.2(D + F + T) + 1.6(L + H) + 0.5(L_r \text{ or } S \text{ or } R)$$

$$P_u = 1.2 \times 230 + 1.6 \times 92 = 423.2 \text{ kips}$$

$$w_u = 1.2 \times 0.5 + 1.6 \times 1.5 = 3.0 \text{ kips/ft (每一層樓之均佈載重)}$$

最小的假設載重只應用在重力載重 (gravity-only load) 組合上

$$N_i = 0.002Y_i, Y_i = \text{載重組合在 } i \text{ 層的重力載重}$$

$$N_i = 0.002Y_i \Rightarrow H_u = 0.002(423.2 \times 2 + 3.0 \times 28) = 1.861 \approx 1.90 \text{ kips}$$

$$2. \text{ 重力載重} + \text{風力} \Rightarrow 1.2D + 1.6W + (0.5 \text{ or } 1.0)^*L + 0.5(L_r \text{ or } S \text{ or } R)$$

利用 ASCE 7-05 載重組合 4 :  $1.2D + 1.0L + 1.6W$

$$P_u = 1.2 \times 230 + 1.0 \times 92 = 368 \text{ kips} \quad H_u = 1.6 \times 78 = 124.8 \text{ kips}$$

$$w_u = 1.2 \times 0.5 + 1.0 \times 1.5 = 2.1 \text{ kips/ft (除了屋頂外的所有樓層之均佈載重)}$$

檢驗柱子斷面是否為結實斷面，即

$$\left( \lambda = \frac{b_f}{2t_f} = 7.11 \right) < \left( \lambda_r = 0.56 \sqrt{\frac{E}{F_y}} = \frac{95}{\sqrt{F_y, \text{ksi}}} = \frac{95}{\sqrt{50}} = 13.5 \right) \quad \text{OK}$$

$$\left( \lambda = \frac{h}{t_w} = 16.8 \right) < \left( \lambda_r = 1.49 \sqrt{\frac{E}{F_y}} = \frac{253}{\sqrt{F_y, \text{ksi}}} = \frac{253}{\sqrt{50}} = 35.6 \right) \quad \text{OK}$$

$\Rightarrow$  此斷面為結實斷面

使用 2005 AISC 設計手冊圖 C-C2.3, C-C2.4 的  $G$  值決定平面柱子之有效長度因子  $K_x$

$$G_{top} = \frac{\Sigma I/L, \text{柱}}{\Sigma I/L, \text{梁}} = \frac{2(I/13)}{1.4I/28} = 3.08 \quad (2005 / \text{P.16.1-241, P.16.1-242})$$

$$G_{bottom} = 1.0 \quad (2005 \text{ AISC 設計手冊-圖 C-C2.3, 代表固定端 } G = 1.0) \quad (\text{P.16.1-241})$$

$$\text{可得 } K_x = 1.57 \quad (2005 \text{ AISC 設計手冊圖 C-C2.3 / 2005 AISC / P. 16.1-241})$$

因為考慮柱 y-方向的頂部與底部是鉸支撐

$$K_y = 1.0, \text{ 因此 } \frac{K_x L_x}{r_x} = \frac{1.57 \times 13 \times 12}{6.33} = 38.7 \quad \frac{K_y L_y}{r_y} = \frac{1.0 \times 13 \times 12}{3.98} = 39.2$$

$$\phi_c F_{cr} = 40.2 \text{ ksi (根據 } KL/r = 39.2) \quad (2005 \text{ AISC Table 4-22 / P.4-318)}$$

$$\phi_c P_n = \phi_c F_{cr} A_g = 40.2 \times 42.7 = 1720 \text{ kips} \quad (2005 \text{ AISC / P.4-13)}$$

僅重力載重的情況下：重力 (Gravity-only) + 假設載重 (Notional) / 圖 2-(a)

無支撐長度(unbraced length)  $L_b = 13 \text{ ft}$ .

$$M_p = F_y Z_x = 50 \times 260 / 12 = 1080 \text{ ft-kips} \quad (2005 \text{ AISC / Eq.F.2-1 / P.16.1-47)}$$

$$L_p = 1.76 r_y \sqrt{\frac{E}{F_y}} = \frac{300}{\sqrt{F_y, \text{ ksi}}} r_y = \frac{300(3.98)}{\sqrt{50(12)}} = 14.1 \text{ ft} \quad (2005 \text{ AISC / P.16.1-48 / P.3-15)}$$

$$M_n = M_p = 1080 \text{ ft-kips} \quad \phi_b M_n = 0.9 \times 1080 = 975 \text{ ft-kips} \quad (2005 \text{ AISC / P3-15)}$$

$$L_p = 14.1 \text{ ft} \quad L_r = 61.7 \text{ ft} \quad (2005 \text{ AISC / P.3-15)}$$

$$\text{因為 } L_b < L_p, \quad \phi M_n = \phi M_p \quad 2005 \text{ AISC C-F1.2 / P.16.1-269}$$

$$C_m = 0.6 - 0.4(M_1/M_2) = 0.6 - 0.4(29/57) = 0.4 \quad (2005 \text{ AISC / P.16.1-22)}$$

$$P_{e1} = \frac{\pi^2 EI}{(K_1 L)^2} = \frac{\pi^2 (29000)(1710)}{(13 \times 12)^2} = 20111.5 \text{ kips} \quad (2005 \text{ AISC / P.16.1-22)}$$

$$P_r = P_u = P_{nt} = 423 + 14 \times 3.0 = 465 \text{ kips} \quad (2005 \text{ AISC / P.16.1-21)}$$

無側位移彎矩放大係數  $B_1$

根據 1986 AISC-LRFD 的  $B_1$ ：

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - P_u/P_e} = \frac{0.4}{1 - 465/19605} = 0.4 \times 1.025 = 0.41 < 1.0 \Rightarrow \text{採用 } B_1 = 1.0 \quad (1986 \text{ AISC / P.6-48)}$$

其中

$P_e = A_g F_y / \lambda_c^2$ ，其中在彎矩平面， $\lambda_c$  與  $K \leq 1.0$  被定義在公式 E2-4 (1986 AISC / P.6-39)

$$\lambda_c = \frac{KL}{r\pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}} = \frac{13 \times 12}{6.33 \times \pi} \sqrt{\frac{50}{29000}} = 0.33 \quad P_e = A_g F_y / \lambda_c^2 = 42.7 \times 50 / 0.33^2 = 19605 \text{ kips}$$

$$A_g = 42.7 \text{ in.}^2, r_x = 6.33 \text{ in.} \quad (1986 \text{ AISC / P.1-28, P.1-29)}$$

根據 1994 AISC-LRFD 的  $B_1$ ：

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - P_u/P_{e1}} = \frac{0.4}{1 - 465/19605} = 0.4 \times 1.025 = 0.41 < 1.0 \Rightarrow \text{採用 } B_1 = 1.0 \quad (1994 \text{ AISC / P.6-41})$$

其中

$P_e = A_g F_y / \lambda_c^2$ ，其中在彎矩平面， $\lambda_c$  與  $K \leq 1.0$  被定義在公式 E2-4 (1994 AISC / P.6-47)

$$\lambda_c = \frac{KL}{r\pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}} = \frac{13 \times 12}{6.33 \times \pi} \sqrt{\frac{50}{29000}} = 0.33 \quad A_g = 42.7 \text{ in.}^2, r_x = 6.33 \text{ in.} \quad (1994 \text{ AISC / P.1-34, P.1-35})$$

$$P_e = A_g F_y / \lambda_c^2 = 42.7 \times 50 / 0.33^2 = 19605 \text{ kips}$$

根據 1999 AISC-LRFD 的  $B_1$ ：

$$P_{e1} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 (29000)(1710)}{(13 \times 12)^2} = 20111.5 \text{ kips} \quad (1999 \text{ AISC / P.16.1-17})$$

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - P_u/P_{e1}} = \frac{0.4}{1 - 465/20111.5} = 0.4 \times 1.024 = 0.41 < 1.0 \Rightarrow \text{採用 } B_1 = 1.0 \quad (1999 / \text{P.16.1-17})$$

根據 2005 AISC-LRFD 的  $B_1$ ：

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - \alpha P_r/P_{e1}} = \frac{0.4}{1 - 465/20111.5} = 0.41 < 1.0 \quad \alpha = 1.0 \Rightarrow \text{採用 } B_1 = 1.0 \quad (2005 / \text{P.16.1-21})$$

當  $B_1$  計算小於 1.0，如圖 2(c) 中，柱兩端之間的放大彎矩小於固定端彎矩 (57 k-ft)，

即採用  $B_1 M_{nt} = 57 \text{ k-ft}$ 。

側位移彎矩放大係數  $B_2$

此結構系統中底層所有柱子的壓力載重  $\Sigma P_u$ ，即  $\Sigma P_u = \alpha \Sigma P_{nt} = 2(423) + 28(3.0) = 930 \text{ kips}$

柱的尤拉(Euler)載重  $P_{e2}$  必須計算細長比  $KL/r$ ，且  $K \geq 1.0$ 。在本範例中， $K = 1.57$  且  $KL =$

$1.57 \times 13 \times 12 = 245 \text{ in}$ ，對於一根柱子的尤拉載重  $P_{e2}$ ，

$$P_{e2} = \frac{\pi^2 EI}{(K_2 L)^2} = \frac{\pi^2 (29000)(1710)}{(245)^2} = 8153.8 \text{ kips} \quad (2005 \text{ AISC / P.16.1-22})$$

由於有兩根相同的底層柱子， $\Sigma P_{e2} = 2(8153.8) = 16307.6 \text{ kips}$ 。

根據 1986 AISC-LRFD 的  $B_2$ ：

$$B_2 = \frac{1}{1 - \Sigma P_u / \Sigma P_e} = \frac{1}{1 - 930 / (2 \times 7956.8)} = 1.06207 \approx 1.06 \quad (1986 \text{ AISC / P.6-49})$$

其中

$$P_e = A_g F_y / \lambda_c^2, \quad \lambda_c = \frac{KL}{r\pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}} = \frac{1.57 \times 13 \times 12}{6.33 \times \pi} \sqrt{\frac{50}{29000}} = 0.518$$

$$A_g = 42.7 \text{ in.}^2, r_x = 6.33 \text{ in.} \quad (1986 \text{ AISC / P.1-28, P.1-29})$$

$$P_e = A_g F_y / \lambda_c^2 = 42.7 \times 50 / 0.518^2 = 7956.8 \text{ kips}$$

根據 1994 AISC-LRFD 的  $B_2$  :

$$B_2 = \frac{1}{1 - \sum P_u / \sum P_{e2}} = \frac{1}{1 - 930 / (2 \times 7956.8)} = 1.06207 \approx 1.06 \quad (1994 \text{ AISC / P.6-42})$$

其中

$$P_{e2} = A_g F_y / \lambda_c^2, \quad \lambda_c = \frac{KL}{r\pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}} = \frac{1.57 \times 13 \times 12}{6.33 \times \pi} \sqrt{\frac{50}{29000}} = 0.518$$

$$A_g = 42.7 \text{ in.}^2, r_x = 6.33 \text{ in.} \quad (1994 \text{ AISC / P.1-34, P.1-35})$$

$$P_{e2} = A_g F_y / \lambda_c^2 = 42.7 \times 50 / 0.518^2 = 7956.8 \text{ kips}$$

根據 1999 AISC-LRFD 的  $B_2$  :

$$B_2 = \frac{1}{1 - \alpha \sum P_u / \sum P_{e2}} = \frac{1}{1 - 1.0 \times 930 / (2 \times 8153.8)}$$

$$= \frac{1}{1 - 930 / 16307.6} = 1.06048 \approx 1.06 \quad \text{where } \alpha = 1.0 \text{ LRFD / 1999 ASIC / P.16.1-18}$$

其中

$$P_{e2} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 (29000)(1710)}{(245)^2} = 8153.8 \text{ k} \quad (1999 \text{ AISC / P.16.1-18})$$

根據 2005 AISC-LRFD 的  $B_2$  :

$$B_2 = \frac{1}{1 - \sum P_u / \sum P_{e2}} = \frac{1}{1 - \alpha \sum P_{nt} / \sum P_{e2}} = \frac{1}{1 - 1.0 \times 930 / (2 \times 8153.8)}$$

$$= \frac{1}{1 - 930 / 16307.6} = 1.06048 \approx 1.06 \quad \text{where } \alpha = 1.0 \text{ LRFD / 2005 AISC / P.16.1-21}$$

柱 AB、CD 的最大放大彎矩  $M_u$  為

$$M_u = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} = 1.0 (57) + 1.06 (8.5) = 66 \text{ ft-kips}$$

檢查 2005 AISC 公式 H1-1a / P.16.1-70，考慮二次效應之  $P_u$  為

$$P_u = P_{nt} + B_2 P_{lt} = (465) + 1.06 (0.3) = 465 \text{ kips}$$

$$\left( \frac{P_u}{\phi_c P_n} = \frac{465}{1720} = 0.27 \right) > 0.2 \quad 2005 \text{ AISC Eq.H1-1a / P.16.1-70}$$

$$\frac{P_u}{\phi P_n} + \frac{8}{9} \left( \frac{M_{ux}}{\phi_b M_{nx}} \right) \leq 1.0 \Rightarrow \frac{465}{1720} + \frac{8}{9} \left( \frac{66}{975} \right) = 0.27 + \frac{8}{9} \left( \frac{66}{975} \right) = 0.33 < 1.0 \quad \text{OK}$$

重力載重 + 風力的情況下： 重力 (Gravity) + 風力 (Wind load) / 圖 2-(d)

$$\text{檢查 } P_u / (\phi_c P_n) \geq 0.2, \quad \frac{P_u}{\phi_c P_n} = \frac{P_{nt} + B_2 P_{lt}}{1720} = 0.243 > 0.2 \quad \text{2005 AISC Eq.H1-1a/P.16.1-70}$$

放大彎矩-無側位移放大係數  $B_1$

$$C_m = 0.6 - 0.4(M_1/M_2) = 0.6 - 0.4(21/40) = 0.4 \quad \text{(2005 AISC / P.16.1-22)}$$

$$P_r = P_u = P_{nt} = 368 + 2.1 \times 14 = 397.4 \text{ kips}$$

根據 1986 AISC-LRFD 的  $B_1$ ：

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - P_u/P_e} = \frac{0.4}{1 - 397.4/19605} = 0.4083 < 1.0 \Rightarrow \text{採用 } B_1 = 1.0 \quad \text{(1986 AISC / P.6-48)}$$

其中

$P_e = A_g F_y / \lambda_c^2$ ，其中在彎矩平面， $\lambda_c$  與  $K \leq 1.0$  被定義在公式 E2-4 (1986 AISC / P.6-39)

$$\lambda_c = \frac{KL}{r\pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}} = \frac{13 \times 12}{6.33 \times \pi} \sqrt{\frac{50}{29000}} = 0.33 \quad A_g = 42.7 \text{ in.}^2, r_x = 6.33 \text{ in.} \quad \text{(1986 AISC / P.1-28, P.1-29)}$$

$$P_e = A_g F_y / \lambda_c^2 = 42.7 \times 50 / 0.33^2 = 19605 \text{ kips}$$

根據 1994 AISC-LRFD 的  $B_1$ ：

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - P_u/P_{e1}} = \frac{0.4}{1 - 397.4/19605} = 0.4083 < 1.0 \Rightarrow \text{採用 } B_1 = 1.0 \quad \text{(1994 AISC / P.6-41)}$$

其中

$P_e = A_g F_y / \lambda_c^2$ ，其中在彎矩平面， $\lambda_c$  與  $K \leq 1.0$  被定義在公式 E2-4 (1994 AISC / P.6-47)

$$\lambda_c = \frac{KL}{r\pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}} = \frac{13 \times 12}{6.33 \times \pi} \sqrt{\frac{50}{29000}} = 0.33 \quad A_g = 42.7 \text{ in.}^2, r_x = 6.33 \text{ in.} \quad \text{(1994 AISC / P.1-34, P.1-35)}$$

$$P_e = A_g F_y / \lambda_c^2 = 42.7 \times 50 / 0.33^2 = 19605 \text{ kips}$$

根據 1999 AISC-LRFD 的  $B_1$ ：

$$P_{e1} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 (29000)(1710)}{(13 \times 12)^2} = 20111.5 \text{ kips} \quad \text{(1999 AISC / P.16.1-17)}$$

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - P_u/P_{e1}} = \frac{0.4}{1 - 397.4/20111.5} = 0.4081 < 1.0 \Rightarrow \text{採用 } B_1 = 1.0 \quad \text{(1999 AISC / P.16.1-17)}$$

根據 2005 AISC-LRFD 的  $B_1$ ：

$$P_{e1} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 (29000)(1710)}{(13 \times 12)^2} = 20111.5 \text{ kips} \quad \text{(2005 AISC / P.16.1-22)}$$

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - P_u/P_{e1}} = \frac{C_m}{1 - \alpha P_r/P_{e1}} = \frac{0.4}{1 - 416/20111.5} = 0.41 < 1.0 \quad \alpha = 1.0$$

⇒ 採用  $B_1 = 1.0$

(2005 AISC / P.16.1-21)

放大彎矩-側位移放大係數  $B_2$

$$\Sigma P_u = \alpha \Sigma P_{nt} = 2 \times 368 + 2.1 \times 28 = 795$$

$$P_{e2} = \frac{\pi^2 EI}{(K_2 L)^2} = \frac{\pi^2 (29000)(1710)}{(245)^2} = 8153.8 \text{ kips} \Rightarrow \Sigma P_{e2} = 8153.8 \times 2 = 16307.2 \text{ kips}$$

根據 1986 AISC-LRFD 的  $B_2$  :

$$B_2 = \frac{1}{1 - \Sigma P_u / \Sigma P_e} = \frac{1}{1 - 795 / (2 \times 7956.8)} = 1.0526 \approx 1.05 \quad (1986 \text{ AISC} / \text{P.6-49})$$

其中

$$P_e = A_g F_y / \lambda_c^2, \quad \lambda_c = \frac{KL}{r\pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}} = \frac{1.57 \times 13 \times 12}{6.33 \times \pi} \sqrt{\frac{50}{29000}} = 0.518$$

$$A_g = 42.7 \text{ in.}^2, \quad r_x = 6.33 \text{ in.}$$

(1986 AISC / P.1-28, P.1-29)

$$P_e = A_g F_y / \lambda_c^2 = 42.7 \times 50 / 0.518^2 = 7956.8 \text{ kips}$$

根據 1994 AISC-LRFD 的  $B_2$  :

$$B_2 = \frac{1}{1 - \Sigma P_u / \Sigma P_{e2}} = \frac{1}{1 - 795 / (2 \times 7956.8)} = 1.0526 \approx 1.05 \quad (1994 \text{ AISC} / \text{P.6-42})$$

其中

$$P_{e2} = A_g F_y / \lambda_c^2, \quad \lambda_c = \frac{KL}{r\pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}} = \frac{1.57 \times 13 \times 12}{6.33 \times \pi} \sqrt{\frac{50}{29000}} = 0.518$$

$$A_g = 42.7 \text{ in.}^2, \quad r_x = 6.33 \text{ in.}$$

(1994 AISC / P.1-34, P.1-35)

$$P_{e2} = A_g F_y / \lambda_c^2 = 42.7 \times 50 / 0.518^2 = 7956.8 \text{ kips}$$

根據 1999 AISC-LRFD 的  $B_2$  :

$$B_2 = \frac{1}{1 - \alpha \Sigma P_u / \Sigma P_{e2}} = \frac{1}{1 - 1.0 \times 795 / (2 \times 8153.8)} = \frac{1}{1 - 795 / 16307.6} = 1.0512 \approx 1.05$$

其中  $\alpha = 1.0$  LFRD / 1999 AISC / P.16.1-18

$$P_{e2} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 (29000)(1710)}{(245)^2} = 8153.8 \text{ k}$$

(1999 AISC / P.16.1-18)

根據 2005 AISC-LRFD 的  $B_2$  :

$$B_2 = \frac{1}{1 - \Sigma P_u / \Sigma P_{e2}} = \frac{1}{1 - \alpha \Sigma P_{nt} / \Sigma P_{e2}} = \frac{1}{1 - 1.0 \times 795 / (2 \times 8153.8)} = \frac{1}{1 - 795 / 16307.6} = 1.0512 \approx 1.05$$

其中  $\alpha = 1.0$  LFRD / 2005 AISC / P.16.1-21



$$P_u = P_{nt} + B_2 P_{lt} = 397.4 + 1.05 \times 18.5 = 417.4 \text{ kips}$$

$$M_{ux} = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} = 1.0 \times 40 + 1.05 \times 554 = 622 \text{ k-ft}$$

檢查 2005 AISC 公式 H1-1a (P.16.1-70).

$$\frac{P_u}{\phi_c P_n} = \frac{417.4}{1720} = 0.243 > 0.2 \text{ Eq. H1-1a / P.16.1-70}$$

$$\frac{P_u}{\phi_c P_n} + \frac{8}{9} \left( \frac{M_{ux}}{\phi_b M_n} \right) \leq 1.0 \quad \frac{417.4}{1720} + \frac{8}{9} \left( \frac{622}{975} \right) = 0.81 < 1.0 \quad \text{OK}$$

因此根據 AISC-LRFD (1986、1994、1999、2005) 的檢驗計算，底層柱子 AB、CD (斷面為 W14×145) 是可以承受上述服務載重(service load)。

例題 2：使用 2005、2010 AISC-LRFD 規範中之直接分析法 檢驗梁-柱構件

有一 15 英尺長之梁-柱構件，係無側支撐結構系統之一部份如圖 3 所示。其一次分析受力情況如圖 3-(a)、(b) 所示。請使用直接分析法(Direct Analysis Method)檢驗在無側支撐結構中的梁-柱構件(斷面為 A992 W12×65 型鋼斷面)是否滿足 AISC-LRFD (2005、2010)。

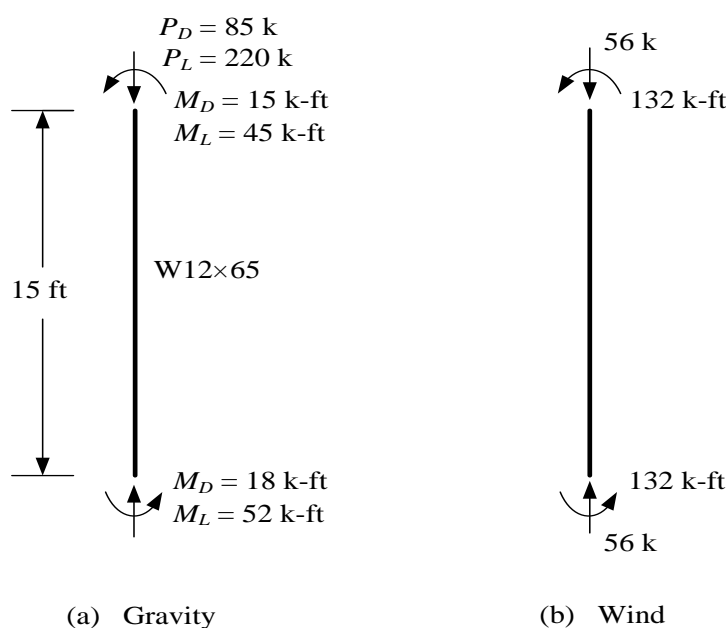


圖 3

2005、2010 AISC-LRFD 分析方法： W12×65 (2005 AISC / P.1-22)

$$A = 19.1 \text{ in}^2, d = 12.1 \text{ in}, t_w = 0.39 \text{ in}, b_f = 12 \text{ in}, t_f = 0.605 \text{ in}, b_f/2t_f = 9.92, h/t_w = 24.9,$$

$$S_x = 87.9 \text{ in}^3, r_x = 5.28 \text{ in}, r_y = 3.02 \text{ in}, r_{ts} = 3.38 \text{ in}, Z_x = 96.8 \text{ in}^3$$

A992 型鋼 ( $F_y = 50 \text{ ksi}$  / 2005 AISC / P.2-39)

AISC-LRFD 載重組合如下：(2005 AISC / P.2-9)

- 1.4D (1)
- 1.2D + 1.6L (2)
- 1.2D + (0.5L or 0.5W) (3)
- 1.2D + 1.0W + 0.5L (4)
- 1.2D + 0.5L (5)
- 0.9D ± 1.0W (6)

- (1) 1.4D = 1.4 × 85 = 119 kips
- (2) 1.2D + 1.6L = 454 kips ←
- (3) 1.2D + (0.5L or 0.5W) = 212 or 138 kips
- (4) 1.2D + 1.0W + 0.5L = 268 kips ←
- (5) 1.2D + 0.5L = 212 kips
- (6) 0.9D ± 1.0W = 76.5 ± 56 kips

根據上述的載重組合計算，我們選擇載重組合(2) 與 (4)

1.2D + 1.6L 與 1.2D + 1.0W + 0.5L

載重組合(2)與(4)作用下的軸力與彎矩值如圖 4 所示

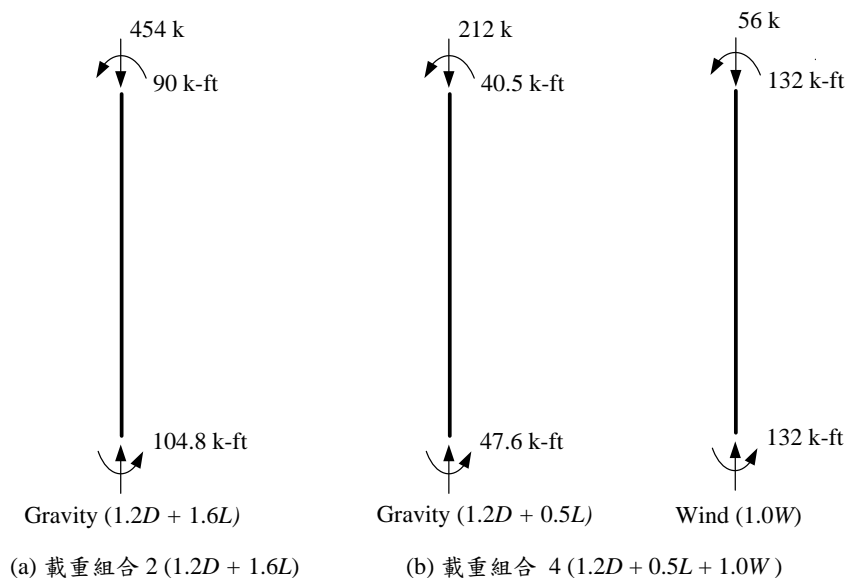


圖 4

根據  $KL = (KL)_y = (KL)_x = 1.0(15) = 15$  ft

$\Rightarrow P_c = \phi_c P_n = \phi_c F_{cr} A_g = 662$  kips

2005 AISC Table 4-1 (P.4-17)

載重組合(2) : 1.2D + 1.6L (僅重力載重、沒有側位移)

$P_r = P_u = P_{nt} + P_{lt} = P_{nt} + 0 = 1.2D + 1.6L = 1.2 \times 85 + 1.6 \times 220 = 454$  kips

$M_{nt} = 1.2M_D + 0.5M_L = 1.2 \times 18 + 1.6 \times 52 = 104.8$  k-ft ←

$M_{lt} = 0$  k-ft (因為對稱性，所以沒有側位移所產生的彎矩)

$$C_m = 0.6 - 0.4(M_1/M_2) = 0.6 - 0.4(90/104.8) = 0.2565 \quad (2005 \text{ AISC} / \text{P.16.1-22})$$

根據 2005 AISC 設計手冊 / P.16.1-22

$$P_{e1} = \frac{\pi^2 EI^*}{(K_1 L)^2} = \frac{\pi^2 EI_x^*}{(K_x L)^2} = \frac{\pi^2 (0.8 EI_x)}{(K_x L)^2} = \frac{\pi^2 (0.8)(29,000)(533)}{(1.0 \times 15 \times 12)^2} = 3767 \text{ kips}$$

根據 2012 AISC 設計手冊 / P.16.1-238

$$P_{e1} = \frac{\pi^2 EI^*}{(K_1 L)^2} = \frac{\pi^2 EI_x^*}{(K_x L)^2} = \frac{\pi^2 (0.8 EI_x)}{(K_x L)^2} = \frac{\pi^2 (0.8)(29,000)(533)}{(1.0 \times 15 \times 12)^2} = 3767 \text{ kips}$$

$$\text{其中 } EI_x^* = 0.8 \tau_b EI_x = 0.8(1.0)EI_x = 0.8EI_x$$

無側位移的彎矩放大因子  $B_1$ ，即

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - (\alpha P_r / P_{e1})} = \frac{C_m}{1 - (1.00 P_u / P_{e1})} = \frac{0.2565}{1 - (454 / 3767)} = 0.292 < 1.0 \quad (2005 \text{ AISC} / \text{P.16.1-21})$$

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - (\alpha P_r / P_{e1})} = \frac{C_m}{1 - (1.00 P_u / P_{e1})} = \frac{0.2565}{1 - (454 / 3767)} = 0.292 < 1.0 \quad (2010 \text{ AISC} / \text{P.16.1-238})$$

根據 2005 AISC-LRFD / P.16.1-21  $\alpha = 1.0 \Rightarrow$  採用  $B_1 = 1.0$

$$M_u = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} = 1.0 \times 104.8 + B_2 \times 0 = 104.8 \text{ k-ft}$$

需求軸向壓力 (required axial load)

$$P_r = P_u = P_{nt} + B_2 P_{lt} = 454 + 0 = 454 \text{ kips}$$

$$L_b = 15 \text{ feet} \Rightarrow C_b = ?$$

圖 5 表示構件在 gravity-load 作用下之彎矩圖

$$C_b = \frac{12.5 M_{max}}{2.5 M_{max} + 3M_A + 4M_B + 3M_C}$$

$$= \frac{12.5 \times (104.8)}{2.5(104.8) + 3(41.3) + 4(7.4) + 3(56.1)} = \frac{1310}{583.8} = 2.24 \leq 3.0 \quad / \quad 2005 \text{ AISC} / \text{P.16.1-46}$$

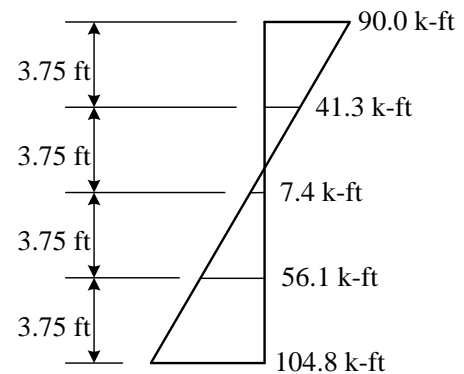


圖 5

以  $L_b = 15$  ft，根據 AISC 規範 Table 3-10 (2005 AISC / P.3-121)

$$\phi_b M_n = 340 \text{ k-ft} \quad (C_b = 1.0)$$

根據 AISC 規範 Table 3-2 (2005 AISC / P.3-17)  $\phi_b M_p = 356 \text{ k-ft}$ .

對於  $C_b = 2.24$   $\phi_b M_n = 2.24 \times 340 = 761.6 \text{ k-ft} > \phi_b M_p = 356 \text{ k-ft}$

$\Rightarrow$  採用  $\phi_b M_n = \phi_b M_p = 356 \text{ k-ft}$ .

檢查 gravity load 情況下  $P_r / (\phi_c P_n) \geq 0.2$

$$P_r/P_c = P_u/(\phi_c P_n) = 454/662 = 0.6858 \geq 0.2 \quad \text{採用 Eq. H1-1a / 2005 AISC / P.16.1-70}$$

$$\text{當 } \frac{P_r}{P_c} \geq 0.2 \quad \frac{P_r}{P_c} + \frac{8}{9} \left( \frac{M_{rx}}{M_{cx}} + \frac{M_{ry}}{M_{cy}} \right) \leq 1.0$$

$$\text{其中 } P_r = P_u, P_c = \phi_c P_n, M_{rx} = M_u, \text{ and } M_{cx} = \phi_c M_n$$

檢查 AISC 公式(H1-1a) (2005 AISC / P.16.1-70)

$$\frac{P_r}{P_c} + \frac{8}{9} \left( \frac{M_{rx}}{\phi_b M_{nx}} \right) = \left( \frac{454}{662} \right) + \frac{8}{9} \left( \frac{104.8}{356} \right) = 0.947 \leq 1.0 \quad (\text{OK})$$

⇒ 載重組合(4):  $1.2D + 0.5L + 1.6W$  (包含側位移)

$$\text{根據 } KL = (KL)_y = (KL)_x = 1.0(15) = 15 \text{ ft}$$

$$P_c = \phi_c P_n = \phi_c F_{cr} A_g = 662 \text{ kips}$$

2005 AISC Table 4-1 (P.4-17)

無側位移彎矩放大係數  $B_1$

$$P_r = P_u = P_{nt} + B_2 P_{lt} = 212 + 0 = 212 \text{ kips} \quad B_2 = 0$$

$$M_{nt} (\text{top}) = 1.2M_D + 0.5M_L = 1.2 \times 15 + 0.5 \times 45 = 40.5 \text{ k-ft}$$

$$M_{nt} (\text{bot}) = 1.2M_D + 0.5M_L = 1.2 \times 18 + 0.5 \times 52 = 47.6 \text{ k-ft} \quad \leftarrow$$

$$M_{lt} = 1.6 M_w = 1.0 \times 132 = 132 \text{ k-ft}$$

$$C_m = 0.6 - 0.4(M_1/M_2) = 0.6 - 0.4(40.5/47.6) = 0.2597$$

(2005 AISC / P.16.1-22)

根據 2005 AISC 設計手冊 / P.16.1-22

$$P_{e1} = \frac{\pi^2 EI^*}{(K_1 L)^2} = \frac{\pi^2 EI_x^*}{(K_x L)^2} = \frac{\pi^2 (0.8 EI_x)}{(K_x L)^2} = \frac{\pi^2 (0.8)(29,000)(533)}{(1.0 \times 15 \times 12)^2} = 3767 \text{ kips}$$

根據 2010 AISC 設計手冊 / P.16.1-238

$$P_{e1} = \frac{\pi^2 EI^*}{(K_1 L)^2} = \frac{\pi^2 EI_x^*}{(K_x L)^2} = \frac{\pi^2 (0.8 EI_x)}{(K_x L)^2} = \frac{\pi^2 (0.8)(29,000)(533)}{(1.0 \times 15 \times 12)^2} = 3767 \text{ kips}$$

$$\text{其中 } EI_x^* = 0.8 \tau_b EI_x = 0.8(1.0)EI_x = 0.8EI_x$$

無側位移的放大因子  $B_1$

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - (\alpha P_r / P_{e1})} = \frac{C_m}{1 - (1.00 P_r / P_{e1})} = \frac{0.2597}{1 - (212 / 3767)} = 0.275 < 1.0 \quad (\text{2005 AISC / P.16.1-21})$$

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - (\alpha P_r / P_{e1})} = \frac{C_m}{1 - (1.00(P_{nt} + P_{lt}) / P_{e1})} = \frac{0.2597}{1 - 1.00((212 + 56) / 3767)} = 0.280 < 1.0 \quad (\text{2010 / P.16.1-238})$$

根據 2005 AISC-LRFD / P.16.1-21  $\alpha = 1.0 \Rightarrow$  採用  $B_1 = 1.0$

對於無側撐構件彎矩放大因子  $B_2$ ，必須了解樓層所有柱子的特性以及  $H$  和  $\Delta_H$ ，才可以計算  $P_{story}$  和  $P_{e\ story}$ 。因為這些數量在本例中不可行，我們將假設  $P_{story} / P_{e\ story}$  的比例與柱的比例相同。

$$\text{因此 } \frac{P_{story}}{P_{e\ story}} \approx \frac{P_u}{P_{e1}} = \frac{212+56}{3767} = \frac{268}{376}$$

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\alpha P_{story}}{P_{e\ story}}} = \frac{1}{1 - \frac{1.0(268)}{3767}} = 1.077 \quad (2010 \text{ AISC} / \text{P.16.1-239})$$

$$P_{e2} = \frac{\pi^2 EI^*}{(K_2 L)^2} = \frac{\pi^2 EI_x^*}{(K_x L)^2} = \frac{\pi^2 (0.8 EI_x)}{(K_x L)^2} = \frac{\pi^2 (0.8)(29,000)(533)}{(1.0 \times 15 \times 12)^2} = 3767 \text{ kips} \quad (2005 \text{ AISC} / \text{P.16.1-22})$$

$$B_2 = \frac{1}{1 - (\alpha \sum P_{nt} / \sum P_{e2})} \approx \frac{1}{1 - (P_{nt} / P_{e2})} = \frac{1}{1 - (212/3767)} = 1.06 \quad (2005 \text{ AISC} / \text{P.16.1-21})$$

放大軸力

$$P_r = P_u = P_{nt} + B_2 P_{lt} = 212 + 1.06 \times 56 = 271.36 \text{ kips} \quad (2005 \text{ AISC})$$

$$P_r = P_u = P_{nt} + B_2 P_{lt} = 212 + 1.077(56) = 272.3 \text{ kips} \quad (2010 \text{ AISC})$$

放大彎矩

$$M_u = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} = 1.0 \times 47.6 + 1.06 \times 132 = 187.52 \text{ k-ft} \quad (2005 \text{ AISC})$$

$$M_u = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} = 1.0 \times 47.6 + 1.077 \times 132 = 189.764 \text{ k-ft} \quad (2010 \text{ AISC})$$

雖然彎矩  $M_{nt}$  和  $M_{lt}$  不同，但是分佈相似且  $C_b$  大致相同，無論彎矩多大， $\phi_b M_p = 356 \text{ k-ft}$  將為設計強度。

檢查 gravity load 情況下  $P_r / (\phi_c P_n) \geq 0.2$

$$\left( \frac{P_u}{\phi_c P_n} = \frac{271.36}{662} = 0.4099 \approx 0.41 \text{ (2005 AISC)} \right) \text{ 和 } \left( \frac{P_u}{\phi_c P_n} = \frac{272.3}{662} = 0.411 \text{ (2010 AISC)} \right) > 0.2$$

$$\text{利用 Eq. H1-1a / 2005 manual P.16.1-70} \quad \text{For } \frac{P_r}{P_c} \geq 0.2 \quad \frac{P_r}{P_c} + \frac{8}{9} \left( \frac{M_{rx}}{M_{cx}} + \frac{M_{ry}}{M_{cy}} \right) \leq 1.0$$

其中  $P_r = P_u$ ， $P_c = \phi_c P_n$ ， $M_{rx} = M_u$ ，and  $M_{cx} = \phi_c M_n$

檢查(2005 AISC 規範 H1-1a / P.16.1-70)

$$\frac{P_u}{\phi_c P_n} + \frac{8}{9} \left( \frac{M_{ux}}{\phi_b M_{nx}} + \frac{M_{uy}}{\phi_b M_{ny}} \right) = \frac{271.36}{662} + \frac{8}{9} \left( \frac{187.52}{356} + 0 \right) = 0.41 + \frac{8}{9} \left( \frac{187.52}{356} \right) = 0.878 < 1.0 \quad (\text{OK})$$

檢查(2010 AISC 規範 H1-1a / P.16.1-73)

$$\frac{P_u}{\phi_c P_n} + \frac{8}{9} \left( \frac{M_{ux}}{\phi_b M_{nx}} + \frac{M_{uy}}{\phi_b M_{ny}} \right) = \frac{272.3}{662} + \frac{8}{9} \left( \frac{189.764}{356} + 0 \right) = 0.411 + \frac{8}{9} \left( \frac{189.764}{356} \right) = 0.885 < 1.0 \quad (\text{OK})$$

因此，此桿件滿足 2005、2010 AISC-LRFD 規範需求。

結果比較 / 載重組合  $1.2D + 1.6L$  與 載重組合  $1.2D + 1.6W + 0.5L$

例題 2	$B_1$	$B_2$	$P_u$ (k)	$M_{ux}$ (ft-k)	$P_{e1}$ (k)	$P_{e2}$ (k)	$\frac{P_u}{\phi P_n} + \frac{8}{9} \frac{M_{ux}}{\phi M_{nx}} \leq 1.0$
						$P_{e \text{ story}}$ (k)	
2005 AISC-LRFD 規範							
$1.2D + 1.6L$	1.0	*NA	454	104.8	3767	*NA	0.947
$1.2D + 1.0W + 0.5L$	1.0	1.06	271.36	187.52	3767	3767	0.878
2010 AISC-LRFD 規範							
$1.2D + 1.6L$	1.0	*NA	454	104.8	3767	*NA	0.947
$1.2D + 1.0W + 0.5L$	1.0	1.077	272.3	189.764	3767	3767	0.885

\*NA: Not Available / 不適用

#### 結論

1. 本研究探討 AISC-LRFD 規範(1986、1994、1999、2005、2010)中，梁-柱構件之彎矩放大因子  $B_1$  及  $B_2$ ，使業界工程師瞭解其計算。
2. 本研究示範例題可以幫助業界工程師更瞭解 AISC-LRFD 規範中(1986、1994、1999、2005、2010)的梁-柱構件之分析。
3. 本研究比較 AISC-LRFD 規範中 (1986、1994、1999、2005) 梁-柱構件有效長度法之差異性。
4. 本研究比較 AISC-LRFD 規範中 (2005、2010) 梁-柱構件直接分析法之差異性。

#### 參考文獻

AISC (1986, 1994, 1999), Manual of Steel Construction, Load and Resistance Factor Design, 1<sup>st</sup>, 2<sup>nd</sup>, 3<sup>rd</sup> editions, AISC, Chicago, Illinois.

AISC (2005, 2010), Manual of Steel Construction, 13<sup>th</sup>, 14<sup>th</sup> editions, AISC, Chicago, Illinois.

Salmon, C.G. and Johnson, J.E. (2009), Steel Structure Design and Behavior, 5<sup>th</sup> edition, Upper Saddle River, New Jersey, P.591-645.

Segui, William T. (2012), Steel Design, 5<sup>th</sup> edition, Thomson Publishing, Canada.