

AISC 梁柱構件 P- Δ 效應之探討- 分析與比較

◎田昀左¹、呂東苗²

一、前言

鋼骨結構考慮梁柱 P- Δ 效應時，根據 2005-AISC 規範係使用一階彈性分析、二階非彈性分析放大係數 B_1 、 B_2 與無側向位移、有側向位移之相關軸力與彎矩(P_{nt} 、 P_{lt} 、 P_{e1} 、 P_{e2} 、 M_{nt} 、 M_{lt}) 為計算依據。然而在 2010-AISC 規範中，取消放大係數 B_1 、 B_2 的使用，改為直接分析法(Direct Analysis Method)直接處理 P- Δ 效應。一般認為 B_1 、 B_2 的使用會產生過於保守設計，本研究針對此問題，提供簡單實例，以三種不同分析方法包括一階彈性分析法、直接分析法(2010-AISC 規範)與二階簡化分析法(2005-AISC 規範)進行比較，以說明這三種分析方法之差異性。

二、示範例題：

有一鋼骨結構，其整體梁柱構件與受力情況(服務載重)如圖 1 所示，所有鋼梁之斷面為美規 W24 \times 76，所有鋼柱則為 W14 \times 90。試依下列 3 種不同分析方法，計算該鋼骨結構控制(或臨界)柱構件之端點設計載重(end forces)。方法-1:不考慮 P- Δ 效應-保守分析法(或一階彈性分析法);方法-2:考慮 P- Δ 效應-直接分析法(2010-AISC 規範採用);方法-3: 二階簡化分析法(2005-AISC 規範採用)。每種分析時必須考慮 AISC 規範所列 2 組合載重即(1.2 D + 1.6 L)與(1.2 D + 0.5 L + 1.6 W)，其中 D = 0.4 kips/ft， L = 0.8 kips/ft， W = 17.0 kips。

¹ 中興大學土木工程系 研究生

² 中興大學土木工程系 教授

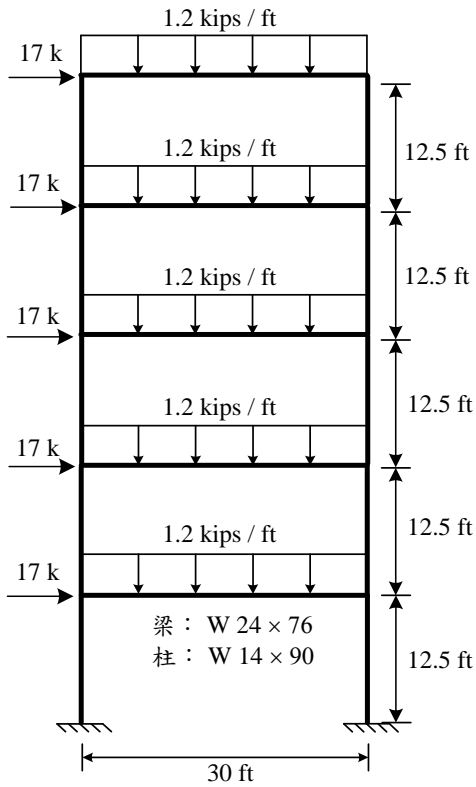


圖 1 分析實例-結構尺寸與服務載重

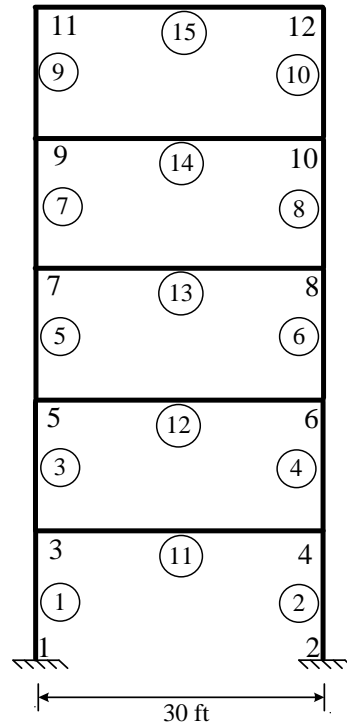


圖 2 電腦分析節點與桿件編號

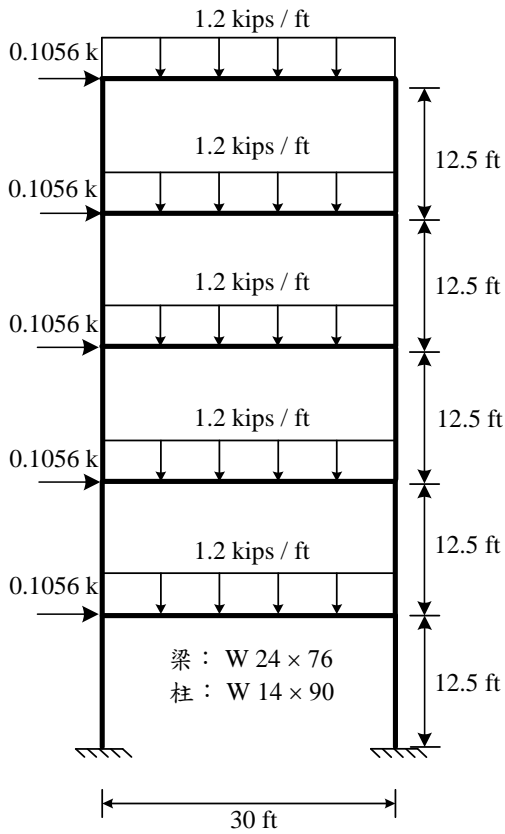


圖 3 組合載重-1 之分析載重

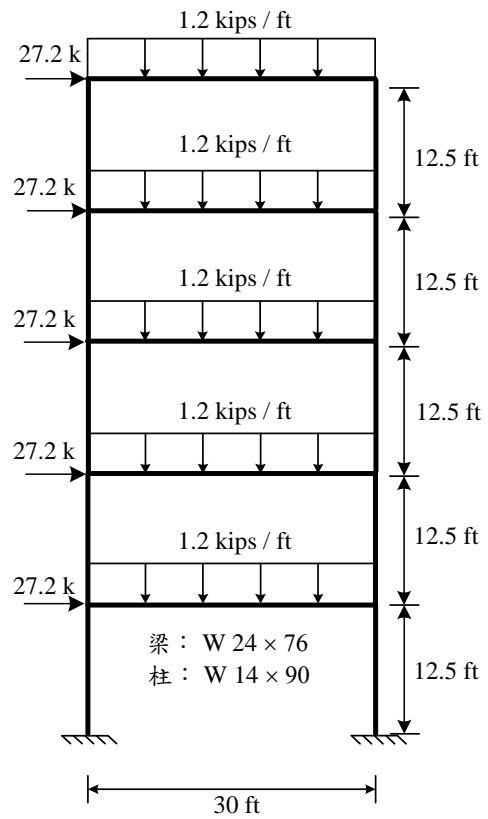


圖 4 組合載重-2 之分析載重

組合載重-1：(1.2 D + 1.6 L)

在該組合載重作用下理論上沒有側向位移，惟根據 2005-AISC 規範(P.16.1-24)，於每層樓必須另加該層垂直載重之 0.2% 為最小側向力，其分析載重如圖 3 所示：

垂直均佈載重 = 1.2 D + 1.6 L = 1.2 × 0.4 + 1.6 × 0.8 = 1.76 k/ft

側向載重為該層垂直載重之 0.2% 為最小側向載重 = 0.2% × (1.76) × 30 = 0.1056 k

最大受力構件為桿件 2：

根據 2005-AISC 設計手冊 / P.1-22, W14×90, A = 26.5 in², I_x = 999 in⁴

根據 2005-AISC 規範 (P.16.1-22)

$$C_m = 0.6 - 0.4 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) = 0.6 - 0.4 \left(\frac{314.31}{582.89} \right) = 0.6 - 0.4(0.5398) = 0.3843$$

$$P_{e1} = \frac{\pi^2 EI}{(K_1 L)^2} = \frac{\pi^2 (29000)(999)}{(1.0 \times 12.5 \times 12)^2} = 12700 \text{ kips}$$

根據 2005-AISC 規範 (P.16.1-21) $\alpha = 1.0$

本例題使用 SSTAN (Simple Structure Analysis) 教學軟體執行一階彈性分析 (不考慮 P-Δ 效應) 與直接分析 (考慮 P-Δ 效應) 之結構分析，輸入檔如下，輸出檔中主要柱構件之端點反力如圖 5、圖 6 所示。

$P_r =$ 構件受壓軸力 = 132.52 kips (見圖 5)

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - \alpha P_r / P_{e1}} = \frac{0.3843}{1 - 132.52 / 12700} = 0.3881 < 1.0$$

B_1 根據 AISC 必須大於 1，因此 B_1 值取 1.0，在本載重下無側向位移 B_2 值取 0.0

$P_u = P_r = P_{nt} + B_2 P_{lt} = 132.52 + 0 = 132.52 \text{ kips}$

$M_u = M_r = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} = 1.0 \times 582.89 + 0 = 582.89 \text{ k-in}$

分析結果(桿件 2)： 單位： kips, inches

一階彈性分析法：(P_u, M_u) = (132.52, 582.89) (見輸入檔/不考慮 P-Δ)

直接分析法：(P_u, M_u) = (132.53, 583.11) (見輸入檔/考慮 P-Δ)

二階簡化分析法：(P_u, M_u) = (132.52, 582.89)

SSTAN 程式分析(組合載重-1) (1.2 D + 1.6 L) 輸入檔如下：

一階彈性分析(不考慮 P-Δ)

```
Example:without P-delta
14,1,1
:
Coordinates
1 X=0 Y=0 Z=0
2 X=360 Y=0 Z=0
3 X=0 Y=150 Z=0
4 X=360 Y=150 Z=0
5 X=0 Y=300 Z=0
6 X=360 Y=300 Z=0
7 X=0 Y=450 Z=0
8 X=360 Y=450 Z=0
9 X=0 Y=600 Z=0
10 X=360 Y=600 Z=0
11 X=0 Y=750 Z=0
12 X=360 Y=750 Z=0
13 X=-12 Y=762 Z=0
14 X=360 Y=762 Z=0
:
Boundary
1,12 DOF=R,R,F,F,F,R
1,2 DOF=F,F,F,F,F,F
:
Beam
15,2
1 A=22.4 I=2100 E=29000
2 A=26.5 I=999 E=29000
C---Columns
1 1,3,13 M=2
2 2,4,13 M=2
3 3,5,13 M=2
4 4,6,13 M=2
5 5,7,13 M=2
6 6,8,13 M=2
7 7,9,13 M=2
8 8,10,13 M=2
9 9,11,13 M=2
10 10,12,13 M=2
C---Beams
11 3,4,14 M=1 L=1.76/12 :1.2(0.4)+1.6(0.8)
12 5,6,14 M=1 L=1.76/12 :1.2(0.4)+1.6(0.8)
13 7,8,14 M=1 L=1.76/12 :1.2(0.4)+1.6(0.8)
14 9,10,14 M=1 L=1.76/12 :1.2(0.4)+1.6(0.8)
15 11,12,14 M=1 L=1.76/12 :1.2(0.4)+1.6(0.8)
:
Loads
3 L=1 F=0.1056,0,0,0,0,0 :0.002(1.2(0.4)+1.6(0.8))(30)
5 L=1 F=0.1056,0,0,0,0,0 :0.002(1.2(0.4)+1.6(0.8))(30)
7 L=1 F=0.1056,0,0,0,0,0 :0.002(1.2(0.4)+1.6(0.8))(30)
9 L=1 F=0.1056,0,0,0,0,0 :0.002(1.2(0.4)+1.6(0.8))(30)
11 L=1 F=0.1056,0,0,0,0,0 :0.002(1.2(0.4)+1.6(0.8))(30)
:
```

直接分析(考慮 P-Δ)

```
Example:with P-delta
14,1,1 P=1
:
Coordinates
1 X=0 Y=0 Z=0
2 X=360 Y=0 Z=0
3 X=0 Y=150 Z=0
4 X=360 Y=150 Z=0
5 X=0 Y=300 Z=0
6 X=360 Y=300 Z=0
7 X=0 Y=450 Z=0
8 X=360 Y=450 Z=0
9 X=0 Y=600 Z=0
10 X=360 Y=600 Z=0
11 X=0 Y=750 Z=0
12 X=360 Y=750 Z=0
13 X=-12 Y=762 Z=0
14 X=360 Y=762 Z=0
:
Boundary
1,12 DOF=R,R,F,F,F,R
1,2 DOF=F,F,F,F,F,F
:
Beam
15,2
1 A=22.4 I=2100 E=29000
2 A=26.5 I=999 E=29000
C---Columns
1 1,3,13 M=2
2 2,4,13 M=2
3 3,5,13 M=2
4 4,6,13 M=2
5 5,7,13 M=2
6 6,8,13 M=2
7 7,9,13 M=2
8 8,10,13 M=2
9 9,11,13 M=2
10 10,12,13 M=2
C---Beams
11 3,4,14 M=1 L=1.76/12 :1.2(0.4)+1.6(0.8)
12 5,6,14 M=1 L=1.76/12 :1.2(0.4)+1.6(0.8)
13 7,8,14 M=1 L=1.76/12 :1.2(0.4)+1.6(0.8)
14 9,10,14 M=1 L=1.76/12 :1.2(0.4)+1.6(0.8)
15 11,12,14 M=1 L=1.76/12 :1.2(0.4)+1.6(0.8)
:
Loads
3 L=1 F=0.1056,0,0,0,0,0 :0.002(1.2(0.4)+1.6(0.8))(30)
5 L=1 F=0.1056,0,0,0,0,0 :0.002(1.2(0.4)+1.6(0.8))(30)
7 L=1 F=0.1056,0,0,0,0,0 :0.002(1.2(0.4)+1.6(0.8))(30)
9 L=1 F=0.1056,0,0,0,0,0 :0.002(1.2(0.4)+1.6(0.8))(30)
11 L=1 F=0.1056,0,0,0,0,0 :0.002(1.2(0.4)+1.6(0.8))(30)
:
```

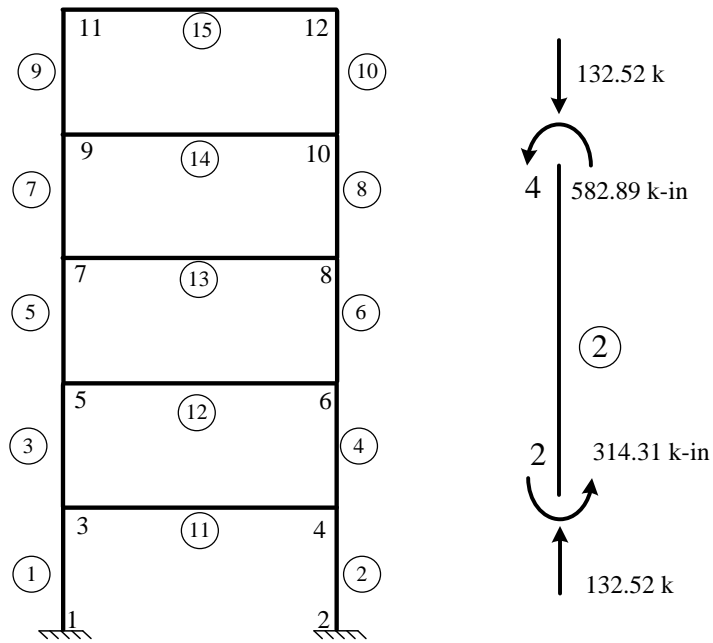


圖 5 結構節點編號與桿件 2 之端點彎矩與軸力 (1.2D + 1.6L)

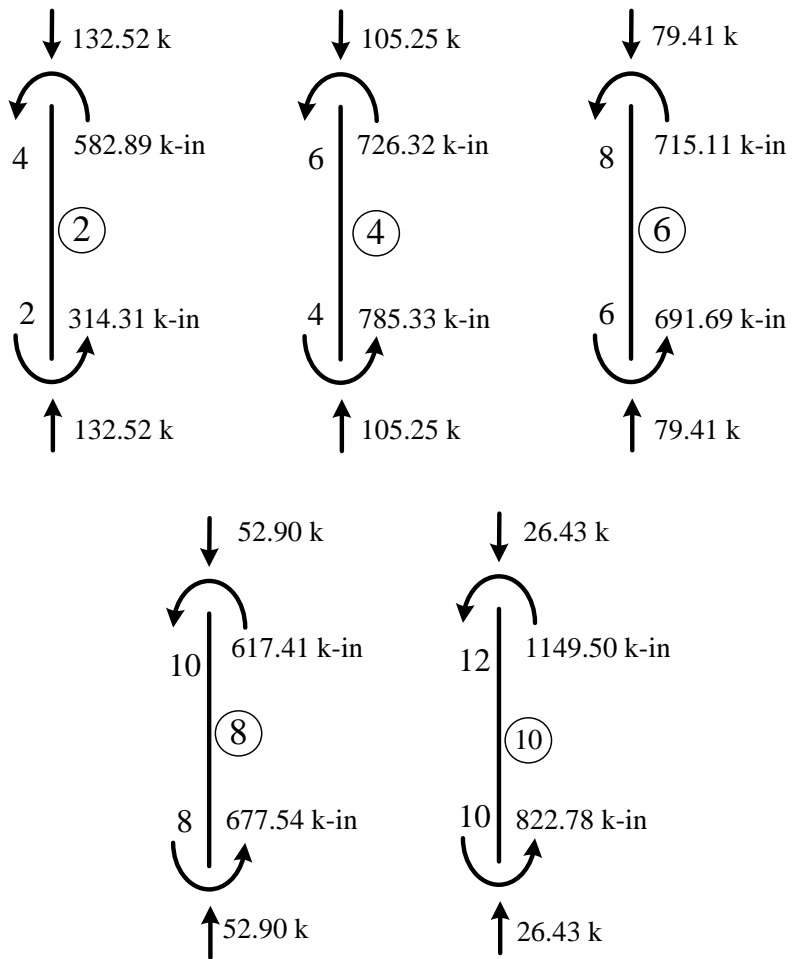


圖 6 桿件 2, 4, 6, 8, 10 之端點彎矩及軸力 (1.2D + 1.6L)

組合載重-2：(1.2D + 0.5L + 1.6W)

本組合載重考慮側向位移，分析載重說明如圖 4。使用 SSTAN 執行無側向位移與有側向位移之結構分析，其不考慮 $P-\Delta$ 效應之輸入檔如下，其輸出檔中主要柱構件之端點力如圖 7、圖 8 所示。圖 7 中之彎矩及軸力係由不考慮 $P-\Delta$ 效應之(1.2D + 0.5L)載重與(1.6W)載重結果。SSTAN 程式分別分析(1.2D+0.5L) 與 (1.6W) 輸入檔如下：

一階彈性分析(不考慮 $P-\Delta$) (1.2D+0.5L)

```
Example:(1.2D+0.5L)
14,1,1
:
Coordinates
1 X=0 Y=0 Z=0
2 X=360 Y=0 Z=0
3 X=0 Y=150 Z=0
4 X=360 Y=150 Z=0
5 X=0 Y=300 Z=0
6 X=360 Y=300 Z=0
7 X=0 Y=450 Z=0
8 X=360 Y=450 Z=0
9 X=0 Y=600 Z=0
10 X=360 Y=600 Z=0
11 X=0 Y=750 Z=0
12 X=360 Y=750 Z=0
13 X=-12 Y=762 Z=0
14 X=360 Y=762 Z=0
:
Boundary
1,12 DOF=R,R,F,F,F,R
1,2 DOF=F,F,F,F,F,F
:
Beam
15,2
1 A=22.4 I=2100 E=29000
2 A=26.5 I=999 E=29000
C---Columns
1 1,3,13 M=2
2 2,4,13 M=2
3 3,5,13 M=2
4 4,6,13 M=2
5 5,7,13 M=2
6 6,8,13 M=2
7 7,9,13 M=2
8 8,10,13 M=2
9 9,11,13 M=2
10 10,12,13 M=2
C---Beams
11 3,4,14 M=1 L=0.88/12 :1.2(0.4)+0.5(0.8)
12 5,6,14 M=1 L=0.88/12 :1.2(0.4)+0.5(0.8)
13 7,8,14 M=1 L=0.88/12 :1.2(0.4)+0.5(0.8)
14 9,10,14 M=1 L=0.88/12 :1.2(0.4)+0.5(0.8)
15 11,12,14 M=1 L=0.88/12 :1.2(0.4)+0.5(0.8)
:
```

一階彈性分析(不考慮 $P-\Delta$) (1.6W)

```
Example:(1.6W)
14,1,1
:
Coordinates
1 X=0 Y=0 Z=0
2 X=360 Y=0 Z=0
3 X=0 Y=150 Z=0
4 X=360 Y=150 Z=0
5 X=0 Y=300 Z=0
6 X=360 Y=300 Z=0
7 X=0 Y=450 Z=0
8 X=360 Y=450 Z=0
9 X=0 Y=600 Z=0
10 X=360 Y=600 Z=0
11 X=0 Y=750 Z=0
12 X=360 Y=750 Z=0
13 X=-12 Y=762 Z=0
14 X=360 Y=762 Z=0
:
Boundary
1,12 DOF=R,R,F,F,F,R
1,2 DOF=F,F,F,F,F,F
:
Beam
15,2
1 A=22.4 I=2100 E=29000
2 A=26.5 I=999 E=29000
C---Columns
1 1,3,13 M=2
2 2,4,13 M=2
3 3,5,13 M=2
4 4,6,13 M=2
5 5,7,13 M=2
6 6,8,13 M=2
7 7,9,13 M=2
8 8,10,13 M=2
9 9,11,13 M=2
10 10,12,13 M=2
C---Beams
11 3,4,14 M=1
12 5,6,14 M=1
13 7,8,14 M=1
14 9,10,14 M=1
15 11,12,14 M=1
:
Loads
3 L=1 F=27.2,0,0,0,0 :1.6(17)
5 L=1 F=27.2,0,0,0,0 :1.6(17)
7 L=1 F=27.2,0,0,0,0 :1.6(17)
9 L=1 F=27.2,0,0,0,0 :1.6(17)
11 L=1 F=27.2,0,0,0,0 :1.6(17)
:
```

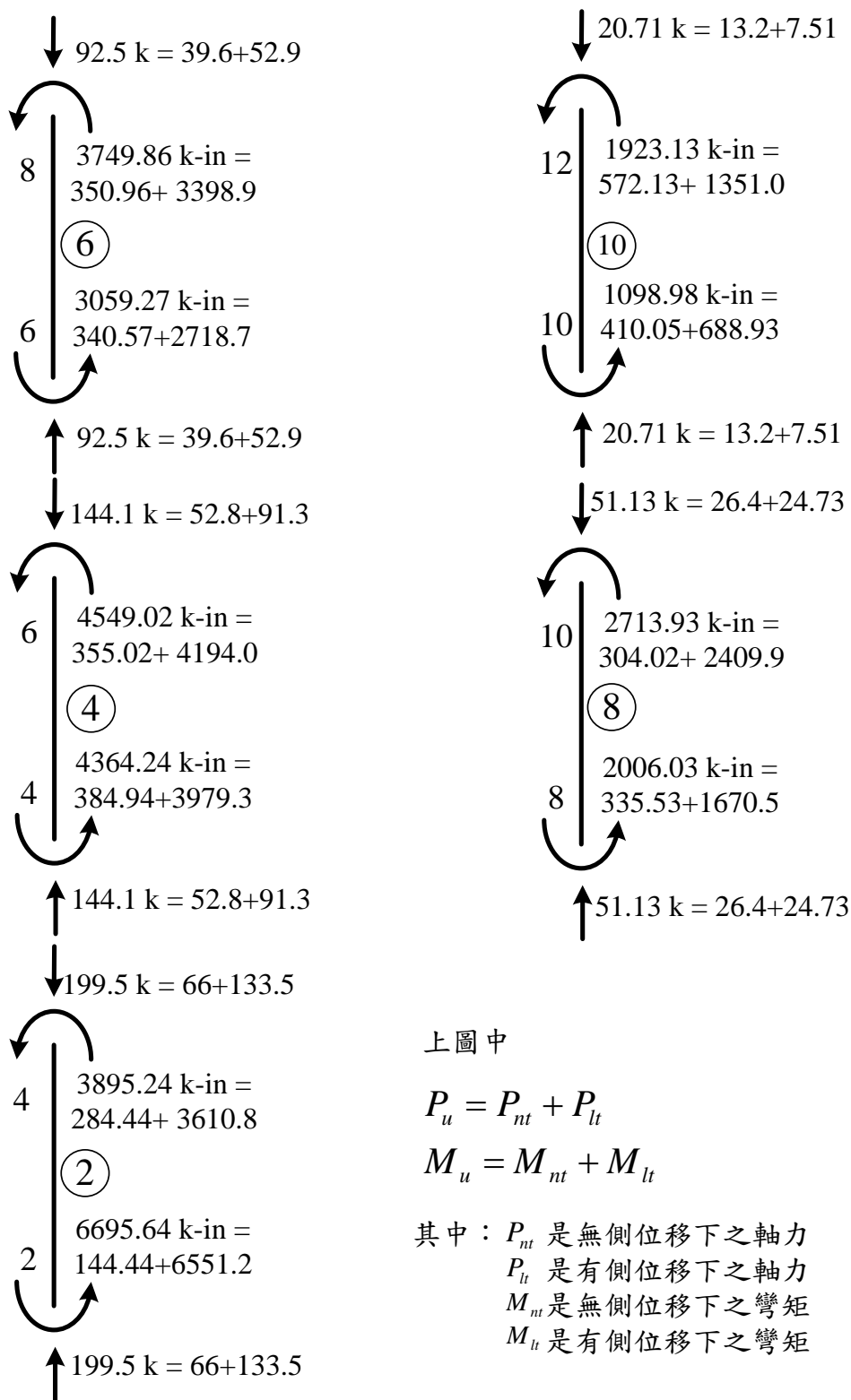


圖 7 桿件 2, 4, 6, 8, 10 之端點彎矩及軸力 (不考慮 $P-\Delta$ 效應)

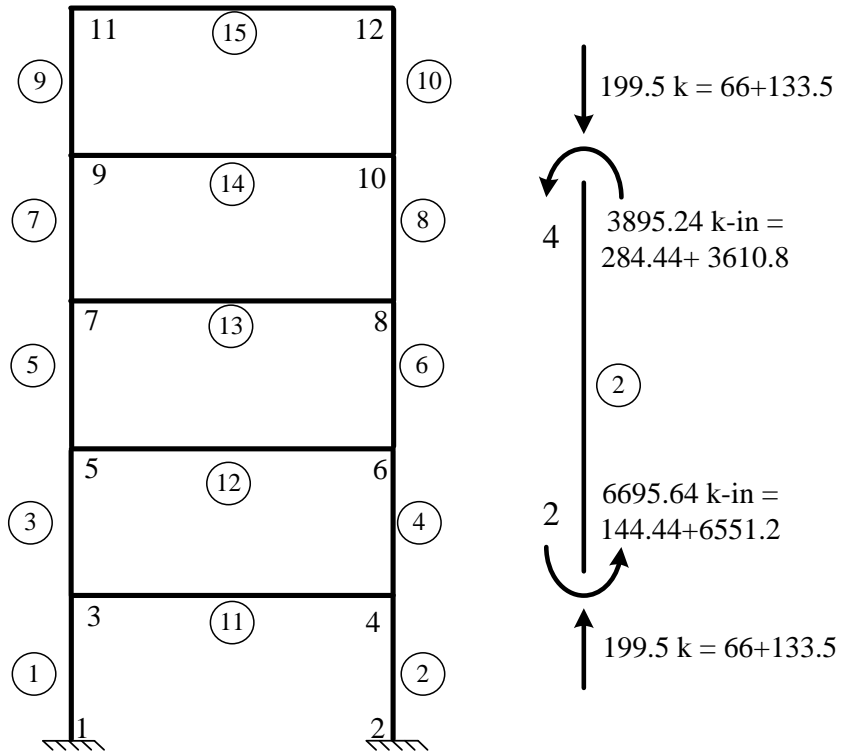


圖 8 結構桿件節點編號與桿件 2 之桿端彎矩和軸力 (1.2D + 0.5L + 1.6W)

最大受力構件為桿件 2：

節點 4 之彎矩 $\Rightarrow M_{nt} = 284.44 \text{ k-in} \quad M_{lt} = 3610.8 \text{ k-in}$

節點 2 之彎矩 $\Rightarrow M_{nt} = 144.44 \text{ k-in} \quad M_{lt} = 6551.2 \text{ k-in}$

軸力 $\Rightarrow P_{nt} = 66 \text{ kips} \quad P_{lt} = 133.5 \text{ kips}$

根據 2005-AISC 規範 (P.16.1-22)

$$C_m = 0.6 - 0.4 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) = 0.6 - 0.4 \left(\frac{144.44}{284.44} \right) = 0.6 - 0.4(0.5078) = 0.3969$$

$$P_{e1} = \frac{\pi^2 EI}{(K_1 L)^2} = \frac{\pi^2 (29000)(999)}{(1.0 \times 12.5 \times 12)^2} = 12700 \text{ kips}$$

根據 2005-AISC 規範 (P.16.1-21, P.16.1-22) : $\alpha = 1.0$

P_r = 構件受壓軸力(無側位移) = 66 kips (見圖 8)

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - \alpha P_r / P_{e1}} = \frac{0.3969}{1 - 66 / 12700} = 0.3990 < 1.0$$

B_1 根據 AISC 必須大於 1, 因此 B_1 值取 1.0。

$$\Sigma P_{e2} = R_M (\Sigma HL / \Delta_H)$$

該層樓總側向載重： $\Sigma H = 1.6 W = 1.6(17) = 27.2$ kips

該載重組合下的總垂直載重：

$$\Sigma P_u = (1.2(0.4) + 0.5(0.8)) (30) = 26.4 \text{ kips} = \Sigma P_{nt}$$

假設在側向載重為 27.2 kips 下的位移極限為

$$\Delta_H = L/300 = 12.5(12)/300 = 0.5 \text{ in.}$$

$$\Sigma P_{e2} = R_M \frac{\Sigma HL}{\Delta_H} = 0.85 \frac{(27.2)(12.5)(12)}{0.5} = 4080 \text{ k} \quad (2005\text{-AISC / P.16.1-22})$$

$$R_M = 0.85 \text{ 使用於 moment-frame and combined systems} \quad (2005\text{-AISC / P.16.1-23})$$

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\alpha \Sigma P_{nt}}{\Sigma P_{e2}}} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha \Sigma P_{nt} \Delta_H}{R_M \Sigma HL}} \quad (2005\text{-AISC / P.16.1-21})$$

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\alpha \Sigma P_{nt}}{\Sigma P_{e2}}} = \frac{1.0}{1.0 - \left(\frac{(1.0)26.4}{4080} \right)} = 1.007$$

在本載重下，考慮側向位移，因此 B_2 值取 1.007

考慮二階分析下的軸壓力與彎矩（見圖 7）：

$$P_u = P_r = P_{nt} + B_2 P_{lt} = 66 + 1.007(133.5) = 200.4345 \text{ k}$$

$$M_u = M_r = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} = 1.0 \times 144.44 + 1.007 \times 6551.2 = 6741.4984 \text{ k-in}$$

分析結果（桿件 2）： 單位： kips, inches

一階彈性分析法： $(P_u, M_u) = (199.48, 6695.60)$ （見輸入檔/不考慮 $P-\Delta$ ）

直接分析法： $(P_u, M_u) = (200.60, 6750.00)$ （見輸入檔/考慮 $P-\Delta$ ）

二階簡化分析法： $(P_u, M_u) = (200.43, 6741.50)$

使用 SSTAN 執行一階彈性分析（不考慮 $P-\Delta$ 效應）與直接分析（考慮 $P-\Delta$ 效應）之結構分析，輸入檔如下，輸出檔中主要柱構件之端點反力如圖 9 及圖 10 所示。

SSTAN 程式分析(組合載重-2) (1.2D + 0.5L + 1.6W) 輸入檔如下：

一階彈性分析 (不考慮 P-Δ)

```
Example:(1.2D+0.5L+1.6W)
14,1,1
:
Coordinates
1 X=0 Y=0 Z=0
2 X=360 Y=0 Z=0
3 X=0 Y=150 Z=0
4 X=360 Y=150 Z=0
5 X=0 Y=300 Z=0
6 X=360 Y=300 Z=0
7 X=0 Y=450 Z=0
8 X=360 Y=450 Z=0
9 X=0 Y=600 Z=0
10 X=360 Y=600 Z=0
11 X=0 Y=750 Z=0
12 X=360 Y=750 Z=0
13 X=-12 Y=762 Z=0
14 X=360 Y=762 Z=0
:
Boundary
1,12 DOF=R,R,F,F,F,R
1,2 DOF=F,F,F,F,F,F
:
Beam
15,2
1 A=22.4 I=2100 E=29000
2 A=26.5 I=999 E=29000
C---Columns
1 1,3,13 M=2
2 2,4,13 M=2
3 3,5,13 M=2
4 4,6,13 M=2
5 5,7,13 M=2
6 6,8,13 M=2
7 7,9,13 M=2
8 8,10,13 M=2
9 9,11,13 M=2
10 10,12,13 M=2
C---Beams
11 3,4,14 M=1 L=0.88/12 :1.2(0.4)+0.5(0.8)
12 5,6,14 M=1 L=0.88/12 :1.2(0.4)+0.5(0.8)
13 7,8,14 M=1 L=0.88/12 :1.2(0.4)+0.5(0.8)
14 9,10,14 M=1 L=0.88/12 :1.2(0.4)+0.5(0.8)
15 11,12,14 M=1 L=0.88/12 :1.2(0.4)+0.5(0.8)
:
Loads
3 L=1 F=27.2,0,0,0,0 :1.6(17)
5 L=1 F=27.2,0,0,0,0 :1.6(17)
7 L=1 F=27.2,0,0,0,0 :1.6(17)
9 L=1 F=27.2,0,0,0,0 :1.6(17)
11 L=1 F=27.2,0,0,0,0 :1.6(17)
:
```

直接分析 (考慮 P-Δ)

```
Example:(1.2D+0.5L+1.6W)
14,1,1 P=1
:
Coordinates
1 X=0 Y=0 Z=0
2 X=360 Y=0 Z=0
3 X=0 Y=150 Z=0
4 X=360 Y=150 Z=0
5 X=0 Y=300 Z=0
6 X=360 Y=300 Z=0
7 X=0 Y=450 Z=0
8 X=360 Y=450 Z=0
9 X=0 Y=600 Z=0
10 X=360 Y=600 Z=0
11 X=0 Y=750 Z=0
12 X=360 Y=750 Z=0
13 X=-12 Y=762 Z=0
14 X=360 Y=762 Z=0
:
Boundary
1,12 DOF=R,R,F,F,F,R
1,2 DOF=F,F,F,F,F,F
:
Beam
15,2
1 A=22.4 I=2100 E=29000
2 A=26.5 I=999 E=29000
C---Columns
1 1,3,13 M=2
2 2,4,13 M=2
3 3,5,13 M=2
4 4,6,13 M=2
5 5,7,13 M=2
6 6,8,13 M=2
7 7,9,13 M=2
8 8,10,13 M=2
9 9,11,13 M=2
10 10,12,13 M=2
C---Beams
11 3,4,14 M=1 L=0.88/12 :1.2(0.4)+0.5(0.8)
12 5,6,14 M=1 L=0.88/12 :1.2(0.4)+0.5(0.8)
13 7,8,14 M=1 L=0.88/12 :1.2(0.4)+0.5(0.8)
14 9,10,14 M=1 L=0.88/12 :1.2(0.4)+0.5(0.8)
15 11,12,14 M=1 L=0.88/12 :1.2(0.4)+0.5(0.8)
:
Loads
3 L=1 F=27.2,0,0,0,0 :1.6(17)
5 L=1 F=27.2,0,0,0,0 :1.6(17)
7 L=1 F=27.2,0,0,0,0 :1.6(17)
9 L=1 F=27.2,0,0,0,0 :1.6(17)
11 L=1 F=27.2,0,0,0,0 :1.6(17)
:
```

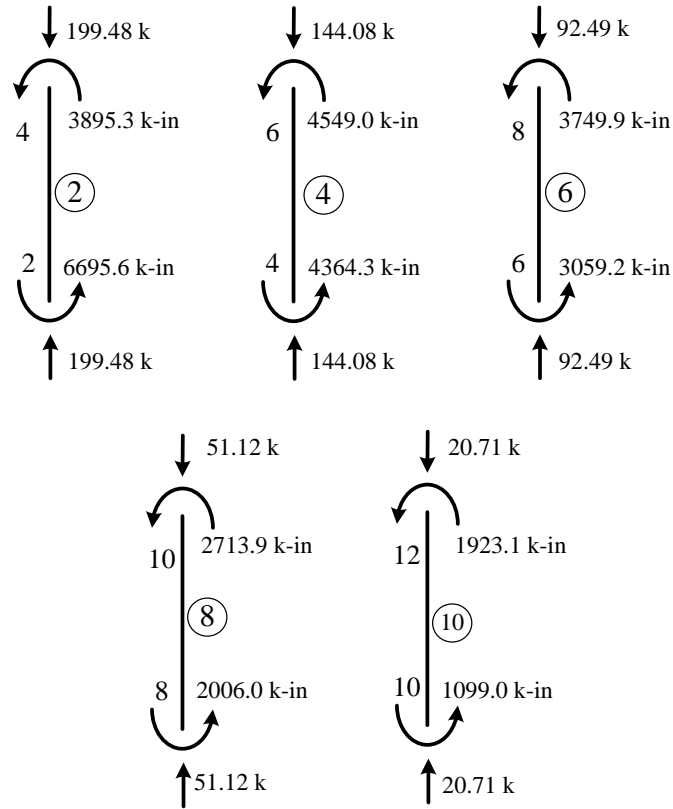


圖 9 桿件 2, 4, 6, 8, 10 不考慮 $P-\Delta$ 之端點彎矩及軸力 ($1.2D + 0.5L + 1.6W$)

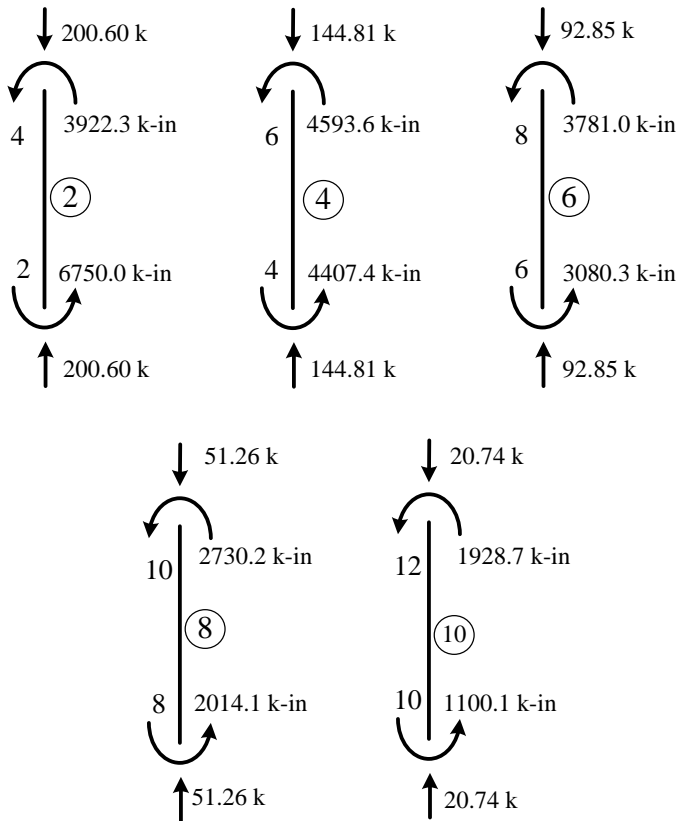


圖 10 桿件 2, 4, 6, 8, 10 考慮 $P-\Delta$ 之端點彎矩及軸力 ($1.2D + 0.5L + 1.6W$)

分析結果整理 (桿件 2) : 單位: kips, inches

組合載重-1 : $(1.2D + 1.6L)$

$$P_r = P_{nt} + B_2P_{lt} = 132.53 + 0 = 132.53 \text{ kips}$$

$$M_r = B_1M_{nt} + B_2M_{lt} = 1.0 \times 583.11 + 0 = 583.11 \text{ k-in}$$

一階彈性分析法 : $(P_u, M_u) = (132.52, 582.89)$

直接分析法 : $(P_u, M_u) = (132.53, 583.11)$

二階簡化分析法 : $(P_u, M_u) = (132.52, 582.89)$

組合載重-2 : $(1.2D + 0.5L + 1.6W)$

$$P_r = P_{nt} + B_2P_{lt} = 66 + 1.007(133.5) = 200.4345 \text{ k}$$

$$M_r = B_1M_{nt} + B_2M_{lt} = 1.0 \times 144.44 + 1.007 \times 6550.9 = 6741.20 \text{ k-in}$$

一階彈性分析法 : $(P_u, M_u) = (199.48, 6695.60)$

直接分析法 : $(P_u, M_u) = (200.60, 6750.00)$

二階簡化分析法 : $(P_u, M_u) = (200.43, 6741.50)$

三、結論

本研究以五層鋼骨建築為例，以三種分析法即一階彈性分析法、直接分析法與二階簡化分析法進行比較，其結果並無明顯差異。因此，儘管 2010-AISC 規範採用較合理的直接分析法，而 2005-AISC 規範處理梁柱 $P-\Delta$ 的作法，一般認為是比較保守且不太合理的。惟由本示範例題得知，以 2005-AISC 規範檢討梁柱 $P-\Delta$ 的作法，還是值得信賴的。

四、參考文獻

1. AISC (2005), Manual of Steel Construction, 13th edition, AISC, Chicago, Illinois.
2. AISC (2010), Manual of Steel Construction, 14th edition, AISC, Chicago, Illinois.
3. SSTAN (1995), Marc Iva Hoit, University of Florida, Gainesville, Florida, USA.