

螺栓接合之線性與非線性分析

Linear and Nonlinear Analysis of Bolted Connections

徐暉亭¹ 曾育英² 張倩倩³ 呂東苗⁴

1 朝陽科技大學營建工程系 助理教授(e-mail: wthsu@cyut.edu.tw)

2 中興大學土木工程系 研究生

3 張倩倩建築師事務所 建築師

4 中興大學土木工程系 教授

摘要

鋼骨托架式接合根據不同螺栓排列、載重位置以及載重角度等因素，考慮不同外力作用時產生之偏心載重，造成彎矩與剪力共同作用於樑柱接頭。AISC 規範[1,2,3]對螺栓接合之分析之過程牽涉複雜運算，規範雖對螺栓之分析提供查表方法，但僅針對特定排列組型式、外力角度以及水平偏心之查表值，並提及當不同角度載重作用與任意螺栓排列型形狀時之詳細分析過程，且規範並未提及垂直偏心之產生之影響。

本研究將以 AISC 規範為出發點討論螺栓接合評估的合理性，由 AISC 規範內提供之各斷面與角度外力作用之依據，以本研究發展之近似公式法推估任意角度的螺栓接合之合理值，根據研究顯示近似公式可以合理推估理論強度。

本研究將高度與角度影響載重之複雜的計算包含彈性、極限數值公式以程式輔助，擺脫規範所提供之特定限制，針對任何角度、不同的螺栓幾何排列，甚至不同強度之螺栓同時作用下的情況供設計者參考，可用於設計或分析現有之螺栓接合，對螺栓接合強度之分析提供較合理之設計依據。

一、前言

鋼結構平面構架系統中構件接合方式以螺栓梁柱接合最為常見，相關研究顯示螺栓接合的力學行為極為複雜，依據螺栓幾何排列、螺栓的強度以及載重等因素作為設計上的考量。梁柱接合常會承受偏心載重，因此接合會同時產生彎矩與剪力作用，由於偏心距離以及承受載重時之角度不同，將會有不同的設計結果。然而對於偏心以及載重角度之相關研究並不多，Brandt[4]的螺栓組合斷面承受偏心載重之極限強度設計，以及Iwankiw[5]的螺栓與銲接接合承受偏心斜向載重之設計這些研究結果是 AISC[1]、LRFD[2]及 ASD[3]規範之主要依據。

螺栓接合的形式包含普通螺栓(適用於承壓型連接，板間接觸面的剪力由螺栓承壓在板上)與摩擦型高強螺栓(適用於摩擦型連接，需用一預壓力將兩塊連接板夾緊)兩種。外力以偏心垂直或斜角作用於的梁柱接合，其螺栓設計需考量外力作用下之剪力與剪力偏心後所產生之額外彎矩之共同影響。

AISC 相關設計規範[1,2,3]對於螺栓接合受彎矩及剪力同時作用下之分析與設計，提供設計手冊查表方法。早期 LRFD[2]與 ASD[3]設計手冊甚至是新版的 AISC 設計手冊[1]僅提供特定排列組合型式之查表值，其限制為特定的表列螺栓間距、螺栓顆數以及單排、雙排、3 排及 4 排之規律組合(如圖 1 所示)，設計規範所提供不同距離的水平偏心作用力，表列出 0~75 度(每隔 15 度)參考值。

AISC 規範[1]提供螺栓接合斷面偏心載重位於重心軸延伸線上之表列值，多數情況而言，載重作用力之並非位於重心，規範只提供具水平偏心外力作用下之查表值，忽略水平偏心剪力產生額外彎矩造成的影響。AISC 設計手冊並未提及當其所列圖表值不敷使用時，則會面臨繁雜的運算過程，若是以較簡單之彈性分析方法，其所得結果相對於保守。

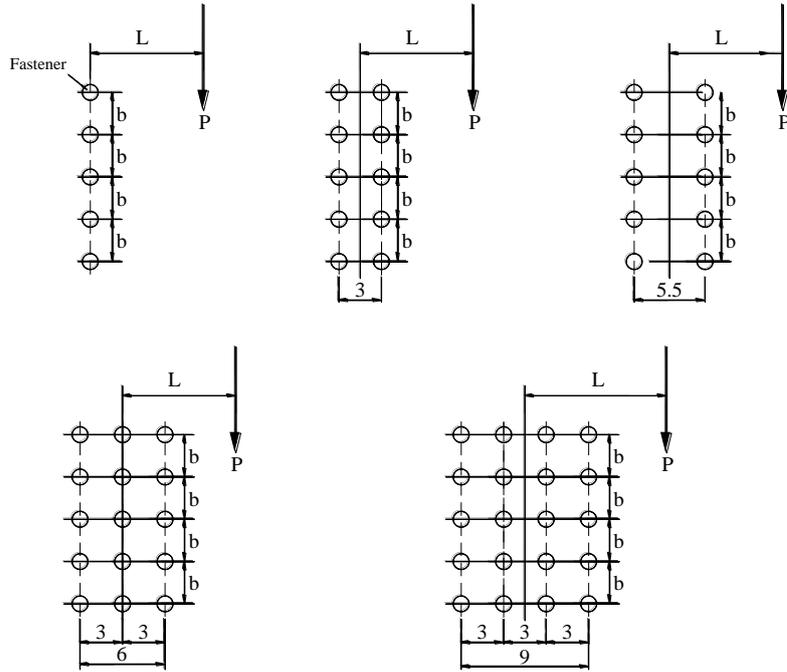


圖 1. 偏心載重之螺栓排列型式 (unit: inch)

鋼構螺栓接合可能因錯誤的施工或是生鏽等環境變遷等影響造成螺栓不規則排列，則使用者則會無法妥善評估其強度。有鑑於此，本研究嘗試將繁雜的公式運算交由程式執行，並將其計算結果與現有 AISC 設計規範比較，以確認本研究結果之正確性。除此，本研究結果將顯示出偏心力之高度不同所產生的強度值之差異性，並且針對任何載重角度($0 \leq \theta \leq 360^\circ$)以瞬時旋轉中心方法合理分析，解決業界在處理鋼構件螺栓接合受不同角度外力行為時所面臨之困難，更能準確地分析鋼構件之螺栓接合行為，以符合最佳化與安全設計之要求。

二、螺栓接合承受偏心載重之分析方法

本研究分析比較各種螺栓接合之分析方法，外力以偏心垂直或斜角作用於的樑柱接合，其螺栓設計需考量外力作用下之直接剪力與剪力偏心後所產生之額外彎矩之共同影響。關於偏心作用在螺栓接合表面上之剪力產生額外彎矩的相關研究相當少。

AISC 規範對此偏心載重提供彈性分析與瞬時旋轉中心分析兩種方法，彈性分析方法較為簡單但是相對保守；瞬時旋轉中心法較為精確，但需要經過繁複的計算或是直接使用手冊提供固定形式之查表值，各方法詳細說明如後。AISC 螺栓接合規範雖然根據過去研究成果所撰寫，然而 AISC 設計手冊沒有說明當其所列圖表值不敷使用時，如何應對之策。因此本研究包含彈性分析、瞬時中心分析以及 AISC 規範查表根據 Iwankiw[5]之相關理論，推導出螺栓接合時非線性分析之簡單強度估算值，方法分別說明如下。

1. 彈性分析法

螺栓接合的螺栓受到偏心載重作用時，螺栓受到偏心載重 P (P_u 或 P_d) 作用產生通過組合螺栓重心上之直接剪力以及偏心載重之彎矩 M 同時作用。彈性分析法主要係根據 Higgins[6] 提出 AISC 手冊中對於螺栓偏心載重之計算之研究，其計算過程假設：

- (1) 承受直接剪力作用後螺栓分別承受相同大小的剪應力
- (2) 偏心載重造成的彎矩力按螺栓與重心間的距離比例分配

螺栓剪應力的計算根據接剪力作用後螺栓剪應力以及彎矩的比例分配疊加後，找出受力最大的螺栓所需強度 r (r_u 與 r_d)，通常是位於離重心最遠的螺栓。

根據 AISC 規範提出集中載重 P (P_u 與 P_d) 作用下，分配於各螺栓的剪力為：

$$r_p = \frac{P}{n} \quad (1)$$

載重 P 若與垂直軸傾斜 θ 角作用時，每各個螺栓的水平剪力 r_{px} 以及垂直剪力 r_{py}

$$r_{px} = r_p \sin \theta = \frac{P \sin \theta}{n} \quad ; \quad r_{py} = r_p \cos \theta = \frac{P \cos \theta}{n} \quad (2)$$

偏心載重 P 對於重心產生額外彎矩 (M) 分配到每各個螺栓的剪力 r_m

$$r_m = \frac{Mc}{I_p} \quad (3)$$

式中 c = 螺栓中心距離重心 (CG) 的直線距離

$$I_p = I_x + I_y = \text{全部螺栓之極慣性矩}$$

偏心載重產生額外彎矩 (M) 分配各個螺栓的水平剪力 r_{mx} 與垂直剪力 r_{my}

$$r_{mx} = \frac{Mc_y}{I_p} \quad ; \quad r_{my} = \frac{Mc_x}{I_p} \quad (4)$$

式中 c_x 與 c_y 為螺栓中心距離重心 (CG) 的水平距離與垂直距離

根據公式(2)以及公式(4)，將各螺栓承受之剪力以及額外彎矩組合可得螺栓之需求強度 r (r_u 與 r_d)

$$r = \sqrt{(r_{px} + r_{mx})^2 + (r_{py} + r_{my})^2} \quad (5)$$

設計理念：需求強度 \leq 設計強度亦即 $\sum r_i \times Q_i \leq \phi R_n$ 。

2. 極限瞬時中心分析法

偏心載重作用於螺栓接合而未通過螺栓斷面重心時，螺栓斷面將根據一個點產生偏移與旋轉，此點稱為瞬時旋轉中心點 (IC)，如圖 2-(a) 所示。極限瞬時旋轉中心的位置根據載重的偏心距離及載重角度、螺栓斷面的、螺栓排列的幾何形狀以及由螺栓的變形的大小所構成。各螺栓分擔之剪力方向與各螺栓中心點到瞬時旋轉中心 (IC) 的直線距離成垂直，如圖 2-(b) 所示，

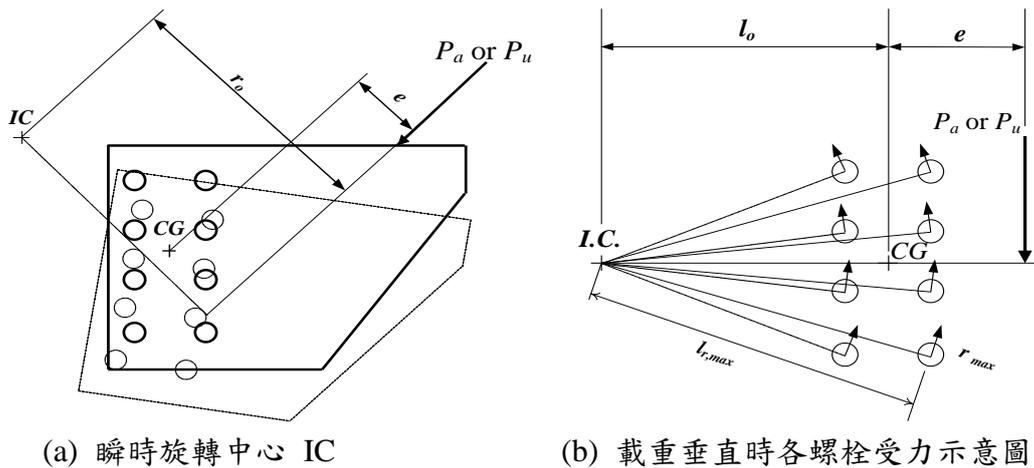


圖 2 瞬時旋轉中心法

極限瞬時中心分析法主要係根據 Crawford 與 Kulak 的相關研究[7,8]顯示，單一螺栓載重與變形之關係曲線如圖 3 所示。距離瞬時中心愈遠的螺栓產生的變形量愈大，根據公式(6)求出各螺栓在變形量不同下之標稱剪力強度，將各螺栓之剪力強度疊加，求出此斷面之標稱剪力總和。

圖 3 根據直徑 3/4 英吋 A325 的螺栓試驗得出，單一螺栓的極限剪力強度為 74 kips 以及最大變形量為 0.34 in.。(即 $R_{ult} = 74.0$ kips, $\Delta_{max} = 0.34$ in.) 研究結果顯示此數值可適用於相同性質之螺栓。

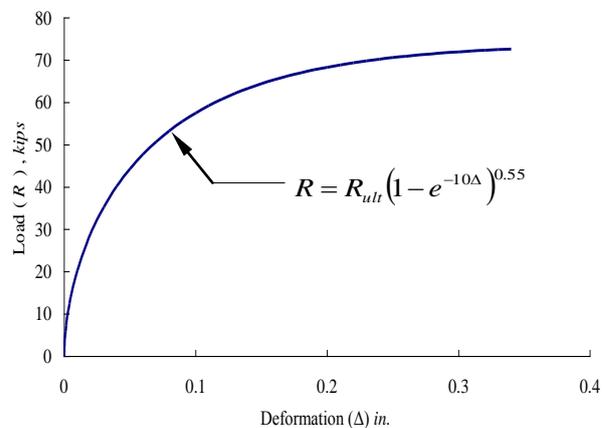


圖 3 螺栓之載重-變形曲線圖

$$R = R_{ult}(1 - e^{-10\Delta})^{0.55} \quad (6)$$

式中 R = 單一螺栓根據其變形量 Δ 對應之標稱剪力強度

R_{ult} = 單一螺栓之極限剪力強度

Δ = 所有外力(包含剪力、承壓以及額外彎矩)造成螺栓之總變形量

e = 自然對數值為 2.718

計算出正確的瞬時旋轉中心的位置後，須滿足平面之靜力平衡方程式條件。

3. AISC 設計手冊查表法

AISC 設計手冊[1]內提供相關查表值，但是其根據特定偏心載重、載重角度($0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$)、螺栓的間距(3in, 5.5in.)以及特定之幾何排列(單排、雙排、三排、四排)，由瞬時旋轉中心法求出偏心載重下所有螺栓之參考係數 C ，AISC 設計手冊所提供之偏心載重對螺栓接合之強度設計，螺栓斷面能承受之最大設計強度為 ϕR_n (LRFD) 或 R_n/Ω (ASD) 其 R_n 如下：

$$R_n = C \times r_n \quad (7)$$

$$C_{min} = \frac{P_u}{\phi r_n} \quad (\text{LRFD}) \quad , \quad C_{min} = \frac{\Omega P_a}{r_n} \quad (\text{ASD}) \quad (8)$$

式中 R_n = 螺栓組合斷面之標稱剪力

C = AISC 設計手冊上之查表係數

r_n = AISC 設計手冊內之單一螺栓斷面之標稱剪力

P_u 與 P_a = LRFD 與 ASD 所最大需求載重 P

ϕ 與 Ω = 分別為 0.75 以及 2

本研究提出規範所列之查表值可針對不同偏心載重角度，計算該外力與螺栓中心延伸線上之距離(如圖 4 所示)，代入規範提供之水平偏心之查表值 e_x ，亦可用內插法得規範所提供之數種斷面(圖 4)之標稱剪力強度。

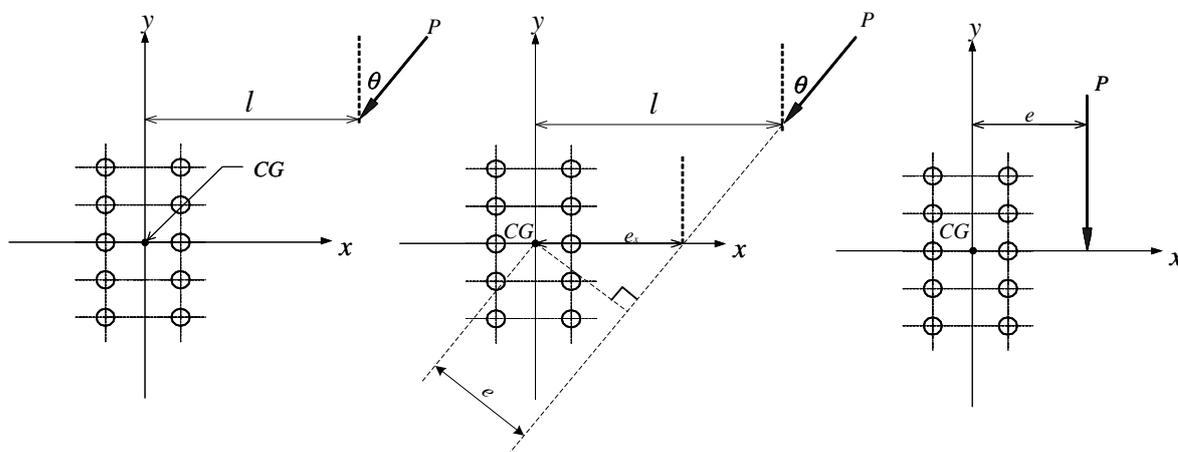


圖 4 斜角偏心載重可查 AISC 規範表列 C 值示意圖

4. AISC-ASD 之近似公式

極限瞬時中心分析法須經過反覆的試誤法運算後求得瞬時中心，當外力垂直作用(角度 θ 為 0 時)，則僅需求瞬時中心距離螺栓重心之水平距離，當 θ 不為零時則瞬時中心相對於螺栓重心位置除了有水平距離外還有垂直高度，增加試誤法的難度。因此 ASD[3] 規範提供較簡單的近似保守公式，針對規範提供之垂直載重之參考係數 C ，根據數學方程式推導出外力於各角度作用時之相對放大值，提出一個 0 度至 90 度時之各角度之力量再分配值 C ，其方法說明如下：

1. 定義 C_{max} 為螺栓數量，即承受純剪力時能抵抗之最大值； C_0 則是偏心外力垂直載重時(θ 為零)規範所提供之參考係數，則 A 表示與螺栓幾何有關之隨角度變化之特性值。

$$A = \frac{C_{max}}{C_0} \geq 1.0 \quad (9)$$

偏心載重垂直作用時根據極限強度分析顯示為該螺栓幾何所承受之最極限之狀況，因此 A 值必須大於等於 1.0。

2. C_a 則是根據近似公式推算出偏心外力於各角度載重時之近似係數，以下公式表示外力以各種角度(θ)作用時之函數。

$$\frac{C_a}{C_o} = \frac{A}{(\sin\theta + A\cos\theta)} \geq 1.0 \quad (10)$$

3. 根據 AISC-ASD 規範提出之近似公式求出，偏心外力於 θ 角度作用時之螺栓幾何能承受之最大容許載重 P_a 為：

$$P_a = C_a r_v \quad (11)$$

圖 5 為 A 值分別 2、4、10 與 20 時之 C_a/C_o 與偏心外力載重角度(θ)為 0 至 90 度之變化，當 $\theta=0$ 時表示偏心載重為垂直，則 $C_o = C_a$ ，當 $\theta=90^\circ$ 時表示偏心載重為水平，則 $C_o = C_{max}$ ，圖 5 顯是當 θ 越大時 C_a/C_o 則越陡呈現出凹曲線狀，因此規範指出在大角度時其誤差相對較大，實際說明於後面例題。

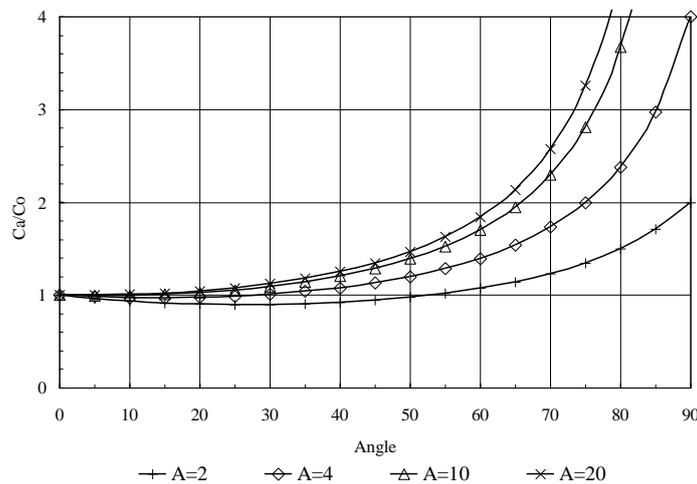


圖 5 斜角偏心載重與 C_a 值

5. 本研究之近似解法

螺栓接合之非線性分析須採用試誤法以及繁雜的計算才能求得，而 AISC 規範僅針對特定型式之螺栓接合提供部分角度參考值(分別為 0, 15, 30, 45, 60, 75 度之值)，若直接採線性內插方式，則會出現高估其強度之大幅度誤差，本研究根據 Iwankiw[5]的螺栓與銲接接合承受偏心斜向載重之設計之理論，運用 AISC 提供之參考值，提出一套更有效率之近似公式，根據規範所提供之 6 個特定角度值，本研究之近似方法可以推算出 0 至 360 度任意角度載重值供使用者參考，其公式如下：

1. 根據 AISC/ASD 提出 C_{max} 為螺栓數量，即承受純剪力時能抵抗之最大值， C_o 則是偏心外力垂直載重時(θ 為零)規範所提供之參考係數， C_a 則是偏心外力作用角度為 θ

為之查表係數值(分別為 0, 15, 30, 45, 60, 75 度之任意值)規範所提供之參考係數，則 A' 表示與螺栓幾何有關之隨角度變化之特性值， C'_o 根據公式(9)推出。

$$A' = \frac{C_{\max}}{C'_o} \geq 1.0 \quad (12)$$

偏心載重垂直作用時根據極限強度分析顯示為該螺栓幾何所承受之最極限之狀況，因此 A' 值必須大於等於 1.0。

2. 將公式(10)的 C_o 由 C'_o 取推導出 C'_o

$$\begin{aligned} \frac{C_a}{C'_o} &= \frac{A}{(\sin\theta + A\cos\theta)} \Rightarrow \frac{C_a}{C'_o} = \frac{C_{\max}/C'_o}{(\sin\theta + C_{\max}/C'_o \cos\theta)} \\ \Rightarrow C_a \sin\theta + C_a (C_{\max}/C'_o) \cos\theta &= C_{\max} \\ \Rightarrow C'_o C_a \sin\theta + C_a C_{\max} \cos\theta &= C'_o C_{\max} \\ \Rightarrow C'_o (C_{\max} - C_a \sin\theta) &= C_a C_{\max} \cos\theta \\ \Rightarrow C'_o &= \frac{C_a C_{\max} \cos\theta}{(C_{\max} - C_a \sin\theta)} \end{aligned}$$

$$\text{可得 } C'_o = \frac{C_a C_{\max} \cos\theta}{(C_{\max} - C_a \sin\theta)} \quad (13)$$

3. 根據求得之 A' 與 C'_o 帶入公式(10)可得任意偏心外力作用角度為 θ 時之 C_a

$$\frac{C_a}{C'_o} = \frac{A'}{(\sin\theta + A'\cos\theta)} \quad (14)$$

4. 根據近似公式求出，偏心外力於 θ 角度作用時之螺栓幾何能承受之最大載重 P_u 為：

$$P_u = \phi C r_n = \phi C_a r_n \quad (15)$$

此時 $C=C_a$ 根據近似公式推導出之係數。

規範所提供之參考值僅介於 0 度至 90 度，本研究除可針對任意斷面計算瞬時中心強度外，甚至可以針對 0 度至 360 度提出相對應角度之分析強度如下：

$$\theta = \sin^{-1}|\sin\theta_o| \quad [\theta_o: \text{原始角度}, \theta: \text{對應第一象限角。}]$$

三、螺栓接合示範例題

[例題 1] 接頭承受偏心載重，柱子為 W 型鋼，鋼柱、托架使用 A36 鋼材，使用 12 根直徑 7/8 in. A325-N 的螺栓、螺栓上端垂直邊距為 2.5 in. 如圖 6 所示。假設 A325-N 螺栓接合相關之各接板強度足夠，螺栓之邊距、間距皆符合設計手冊之要求，分別使用下列方法，分析求解載重角度 $\theta = 30^\circ$ 時設計強度。

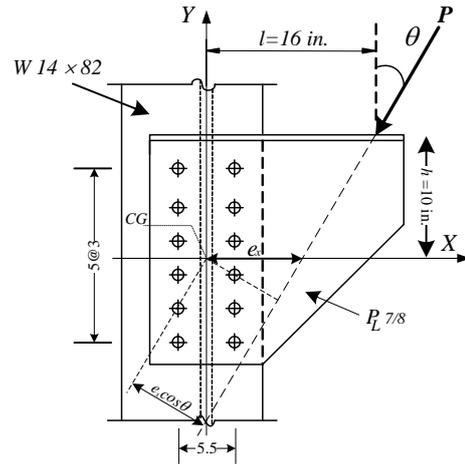


圖 6 雙排之螺栓斷面例題

偏心載重(P)以斜角(與垂直軸夾角 30°)作用於螺栓群，詳如圖 6 所示

(a). 彈性分析法 / Inclined Angle $\theta = 30^\circ$ / $l = 16$ in., $h = 10$ in.

$$\text{斷面 } I_p = \sum d^2 = (7.988)^2 \times 4 + (5.273)^2 \times 4 + (3.132)^2 \times 4 = 406 \text{ in.}^2$$

根據公式(1)各螺栓之直接剪力

$$R_x = 0.5P/12 = 0.042 P \quad , \quad R_y = 0.866P/12 = 0.072 P$$

根據公式(4)臨界螺栓因為偏心載重(P)而承受之剪力

$$M_{c.g.} = P \times e = M_o = (0.866P \times 16) - (0.5P \times 10) = 13.856P - 5P = 8.856 P$$

$$R_{mx} = \frac{Pey}{I_p} = \frac{8.856P \times 7.5}{406} = 0.163 P \quad ; \quad R_{my} = \frac{Pex}{I_p} = \frac{8.856P \times 2.75}{406} = 0.060 P$$

根據公式(5)臨界螺栓承受之最大剪力

$$R = \sqrt{(R_{px} + R_{mx})^2 + (R_{py} + R_{my})^2} = \sqrt{(0.042P + 0.163P)^2 + (0.072P + 0.060P)^2} = 0.244 P$$

因此臨界螺栓承受之最大剪力 $R = 0.244 P$ ， C_e 值 = $1/0.244 = 4.09$ 。

(b). 極限瞬時中心分析法 / IC Method

$$\text{螺栓之設計剪力 } \phi r_n = \phi F_n A_b = 0.75 \times 48 \times 0.6 = 21.6 \text{ kips}$$

$$\text{根據公式(6)} \quad R = R_{ult} (1 - e^{-10\Delta})^{0.55} \quad , \quad \Delta = 0.34 (d_i / d_{max})$$

$$R_x = P \times d_y / d, \quad R_y = P \times d_x / d, \quad R_{ult} = \phi r_n = 21.6 \text{ kips}, \quad l = 16 \text{ in.}$$

$$\text{令 } \sum R \times d = -[(0.866 P) \times (16 - a_x)] + [(0.5 P) \times (10 - a_y)]$$

$$\Rightarrow P = \sum R \times d / -[(0.866) \times (16 - a_x)] + [(0.5) \times (10 - a_y)]$$

上式給一組 (a_x, a_y) 可得 $\Sigma R \times d$ (詳如表 3)進而求得 P 值。若求得之 $P_x = \Sigma R_h, P_y = \Sigma R_v, M_{i.c} = \Sigma R \times d$ 時,表示 (a_x, a_y) 為正確瞬時旋轉中心。根據試誤法可取得瞬時中心位置相對於形心之座標為 $(a_x, a_y) = (-3.046 \text{ in.}, 2.239 \text{ in.})$ 。當瞬時中心確定後各螺栓之位置、水平剪力、垂直剪力與彎矩 詳如表 1 所示。

$$P = \Sigma R \times d / -[(0.866) \times (16 - a_x)] + [(0.5) \times (10 - a_y)]$$

$$= 1504.604 / -[0.866 \times (16 + 3.046)] + [0.5 \times (10 - 2.239)] = 119.28 \text{ kips}$$

檢驗各螺栓之水平是否取得平衡, $P_x = 119.28 \times \sin 30^\circ = 59.64 \text{ k} = \Sigma R_x$ OK
 檢驗各螺栓之垂直剪力總和是否與垂直外力取得平衡

$$P_y = 119.28 \times \cos 30^\circ = 103.30 \text{ kips} = \Sigma R_v \quad \text{OK}$$

因此最大偏心載重 $P_u = P = 119.28 \text{ kips}$, C_a 值 = $119.28 / 21.6 = 5.52$ 。

表 1 偏心斜角載重下各螺栓之受力情況(瞬時旋轉中心法)

| 編號 | X | Y | h | v | d | D | R | R_h | R_v | $R \times d$ |
|----------|-----|----|-----------|------------|------------|------------|------------|---------|---------|--------------|
| 1 | 0 | 0 | 0.29 6 | -9.73 9 | 9.743 | 0.29 2 | 20.95 3 | -20.944 | 0.637 | 204.150 |
| 2 | 0 | 3 | 0.29 6 | -6.73 9 | 6.745 | 0.20 2 | 19.98 0 | -19.960 | 0.878 | 134.766 |
| 3 | 0 | 6 | 0.29 6 | -3.73 9 | 3.750 | 0.113 6 | 17.40 6 | -17.352 | 1.376 | 65.280 |
| 4 | 0 | 9 | 0.29 6 | -0.73 9 | 0.796 | 0.02 4 | 9.213 | -8.550 | 3.431 | 7.332 |
| 5 | 0 | 12 | 0.29 6 | 2.261 | 2.281 | 0.06 8 | 14.68 0 | 14.556 | 1.908 | 33.482 |
| 6 | 0 | 15 | 0.29 6 | 5.261 | 5.270 | 0.15 8 | 19.02 9 | 18.999 | 1.070 | 100.279 |
| 7 | 5.5 | 0 | 5.79 6 | -9.73 9 | 11.33 3 | 0.34 0 | 21.20 0 | -18.218 | 10.843 | 240.267 |
| 8 | 5.5 | 3 | 5.79 6 | -6.73 9 | 8.889 | 0.26 7 | 20.76 1 | -15.739 | 13.539 | 184.538 |
| 9 | 5.5 | 6 | 5.79 6 | -3.73 9 | 6.897 | 0.20 7 | 20.05 4 | -10.870 | 16.853 | 138.325 |
| 10 | 5.5 | 9 | 5.79 6 | -0.73 9 | 5.843 | 0.17 5 | 19.45 4 | -2.459 | 19.298 | 113.675 |
| 11 | 5.5 | 12 | 5.79 6 | 2.261 | 6.222 | 0.18 7 | 19.69 4 | 7.158 | 18.347 | 122.531 |
| 12 | 5.5 | 15 | 5.79 6 | 5.261 | 7.828 | 0.23 5 | 20.44 0 | 13.738 | 15.135 | 160.006 |
| Σ | | | | | | | | -59.642 | 103.314 | 1504.631 |

(c). AISC 設計手冊查表法

螺栓設計剪力 $\phi r_n = \phi F_n A_b = 0.75 \times 48 \times 0.6 = 21.6 \text{ kips}$

設計強度 $P_u \leq \phi R_n = C_{min} \times \phi r_n \quad \phi r_n = 21.6 \text{ k}$

偏心載重(P)以斜角(與垂直軸夾角 30 度)作用於螺栓群，距離形心原點(l, h) = (16,10)。

$$y = x \tan(270 - \theta) + c \quad (c \text{ 為常數})$$

將載重(P)延伸線上一已知點(16,10)代入直線方程式，即可得常數 c 值。上式即為載重(P)延伸線方程式。利用點與直線關係得下式，解原點與載重(P)延伸線最短距離 $e (=e_x \cos \theta)$ 。

$$e = |c| / (\tan(270 - \theta)^2 + 1.0^2)^{0.5} = 17.7128 / ((1.732^2 + 1.0^2)^{0.5}) = 8.856 \text{ in.}$$

$$e_x = e / \cos \theta = 8.856 / \cos 30^\circ = 10.226 \text{ in.}$$

根據 AISC 設計手冊[1]表 7-9 (P.7-46)，($\theta = 30^\circ, s = 3 \text{ in.}, e_x = 10.226 \text{ in.}, n = 6$)

根據設計手冊表 7-9，偏心垂直力 $e_x = 10 \text{ in.}$ 時其 C_{min} 值為 5.61，偏心垂直力 $e_x = 12 \text{ in.}$ 時其 C_{min} 值為 4.92，採用內插得偏心垂直力 $e_x = 10.226 \text{ in.}$ 時其 C_{min} 值為 5.532。

設計強度 $P_u = \phi R_n = \phi C_{min} r_n = 5.532 \times 21.6 = 119.49 \text{ kips}$

因此根據 2005 AISC-LRFD，其最大容許偏心載重 $P_u = 119.49 \text{ kips}$ ， C_{min} 值為 5.532。

(d). AISC-ASD 之近似公式

根據設計手冊表 7-9，偏心垂直力 $e_x = 10 \text{ in.}$ 時其 C_{min} 值為 5.23，偏心垂直力 $e_x = 12 \text{ in.}$ 時其 C_{min} 值為 4.53，採用內插得偏心垂直力 $e_x = 10.226 \text{ in.}$ 時其 C_o 值為 5.1509。 C_{max} 為螺栓數 12。

由公式(9)得
$$A = \frac{C_{max}}{C_o} = \frac{12}{5.1509} = 2.33 \geq 1.0$$

整理公式(10)
$$\frac{C_a}{C_o} = \frac{A}{(\sin \theta + A \cos \theta)} \geq 1.0$$

$$C_a = 5.1509 \times 2.33 / (\sin 30^\circ + 2.33 \cos 30^\circ) = 4.7665$$

代入公式(11) $P_a = C_a r_v$ 得 $P_a = 4.7665 \times 21.6 = 102.9564$

由各方法求解例題之設計載重與 C 值整理，如表 2 所示：

表 2 例題以不同方法分析所得之最大容許載重

| 方法 | 偏心載重以30度角作用螺栓斷面之最大容許載重P (kips) | 與最精確值誤差 (%) | C值 |
|---------------|--------------------------------|-------------|--------|
| 彈性分析法 | 0.244P (= 88.344) | -25.936 | 4.09 |
| 瞬時旋轉中心法 | 119.28 | - | 5.52 |
| AISC設計手冊查表法 | 119.49 | 0.176 | 5.532 |
| AISC-ASD之近似公式 | 102.9564 | -13.685 | 4.7665 |
| 本研究之近似解法 | 119.49 | 0.176 | 5.532 |

表 2 結果顯示，偏心載重以 30 度角作用於樑柱接頭上，若直接採用彈性分析法計算則會過於保守，其誤差為 25.936%。以規範為依據使用實際垂直之偏心距離 e' 為考量，根據查表內插法得出其最大設計載重，會產生高估現象係因為內插得 C 值本身高估。因此本研究建議採用理論公式計算較為精確。

由於本研究之近似解法 C_a 值，是利用偏心外力作用角度為 θ ，對應之規範所提供之參考係數（分別為 0, 15, 30, 45, 60, 75 度之任意值），在此與 AISC 設計手冊查表法使用相同 C_a 值，計算必得相同 P 值，故不贅述。

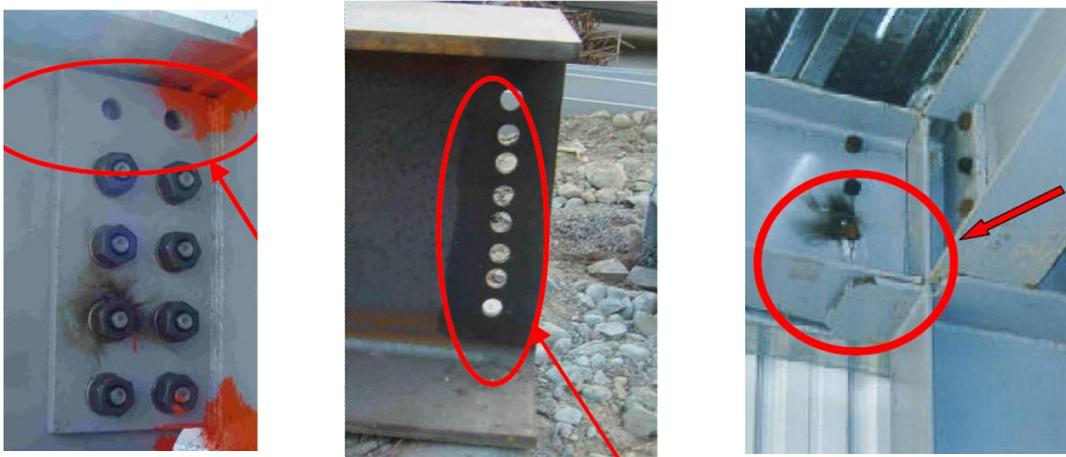


圖 7. 施工誤差導致不規則之螺栓排列型式

實務上，鋼構螺栓接頭可能因施工錯誤或是生鏽等環境變遷等影響(如圖 7)，造成螺栓不規則排列，則使用者將無法利用 AISC 規範查表評估強度。

[例題 2]承上題，若編號 5 及編號 10 兩顆螺栓接頭損壞，其餘條件相同，分別使用下列方法，分析求解載重角度 $\theta = 30^\circ$ 時設計強度。

- (a). 彈性分析法
- (b). 極限瞬時中心分析法

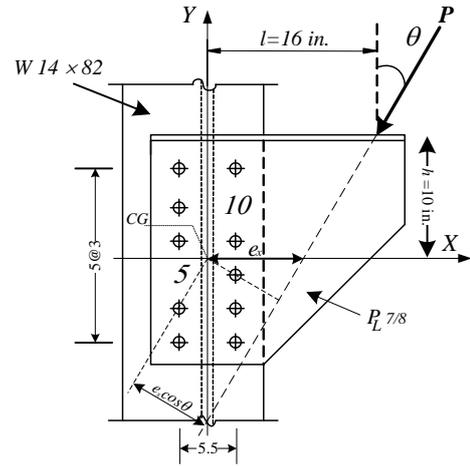


圖 8 雙排之螺栓部分損壞斷面圖

(a). 彈性分析法 / Elastic analysis

/ Inclined Angle $\theta = 30^\circ$ / $l = 16 \text{ in.}$, $h = 10 \text{ in.}$

斷面 $I_p = \sum d^2 = (7.988)^2 \times 4 + (5.273)^2 \times 3 + (3.132)^2 \times 3 = 368.07 \text{ in.}^2$

根據公式(1)各螺栓之直接剪力

$$R_x = 0.5P/10 = 0.05 P \quad , \quad R_y = 0.866P/10 = 0.0866 P$$

根據公式(4)臨界螺栓因為偏心載重(P)而承受之剪力

$$M_{c.g.} = P \times e = M_o = (0.866P \times 16) - (0.5P \times 10) = 13.856P - 5P = 8.856 P$$

$$R_{mx} = \frac{Pey}{I_p} = \frac{8.856P \times 6.9}{368.07} = 0.166 P \quad ; \quad R_{my} = \frac{Pex}{I_p} = \frac{8.856P \times 2.75}{406} = 0.066 P$$

根據公式(5)臨界螺栓承受之最大剪力

$$R = \sqrt{(R_{px} + R_{mx})^2 + (R_{py} + R_{my})^2} = \sqrt{(0.05P + 0.166P)^2 + (0.0866P + 0.066P)^2} = 0.264 P$$

因此臨界螺栓承受之最大剪力 $R = 0.264 P$, $C_e \text{ 值} = 1/0.264 = 3.788$ 。

(b). 極限瞬時中心分析法 / Instantaneous Center of Rotation Method / IC Method

螺栓之設計剪力 $\phi r_n = \phi F_n A_b = 0.75 \times 48 \times 0.6 = 21.6 \text{ kips}$

根據公式(6) $R = R_{ult} (1 - e^{-10\Delta})^{0.55}$, $\Delta = 0.34 (d_i / d_{max})$

$$R_x = P \times d_y / d, \quad R_y = P \times d_x / d, \quad R_{ult} = \phi r_n = 21.6 \text{ kips}, \quad l = 16 \text{ in.}$$

$$\text{令 } \sum R \times d = -[(0.866 P) \times (16 - a_x)] + [(0.5 P) \times (10 - a_y)]$$

$$\Rightarrow P = \sum R \times d / -[(0.866) \times (16 - a_x)] + [(0.5) \times (10 - a_y)]$$

上式給一組 (a_x, a_y) 可得 $\sum R \times d$ (詳如表 3) 進而求得 P 值。若求得之 $P_x = \sum R_h, P_y = \sum R_v$, $M_{i.c} = \sum R \times d$ 時，表示 (a_x, a_y) 為正確瞬時旋轉中心。根據試誤法可取得瞬時中心位置相對於形心之座標為 $(a_x, a_y) = (-3.2032 \text{ in.}, 2.004 \text{ in.})$ 。當瞬時中心確定後各螺栓之位置、水平剪力、垂直剪力與彎矩 詳如表 3 所示。

$$P = \Sigma R \times d / -[(0.866) \times (16 - a_x)] + [(0.5) \times (10 - a_y)]$$

$$= 1322.444 / -[0.866 \times (16 + 3.2032)] + [0.5 \times (10 - 2.004)] = -104.69 \text{ kips}$$

檢驗各螺栓之水平是否取得平衡， $P_x = -104.69 \times \sin 30^\circ = -52.344 \text{ k} = \Sigma R_x$ OK

檢驗各螺栓之垂直剪力總和是否與垂直外力取得平衡

$$P_y = 104.69 \times \cos 30^\circ = 90.664 \text{ kips} = \Sigma R_y \quad \text{OK}$$

因此最大偏心載重 $P_u = P = 104.69 \text{ kips}$ ， C_a 值 = $104.69 / 21.6 = 4.847$

表 3 偏心斜角載重下各螺栓之受力情況 (不規則螺栓排列)

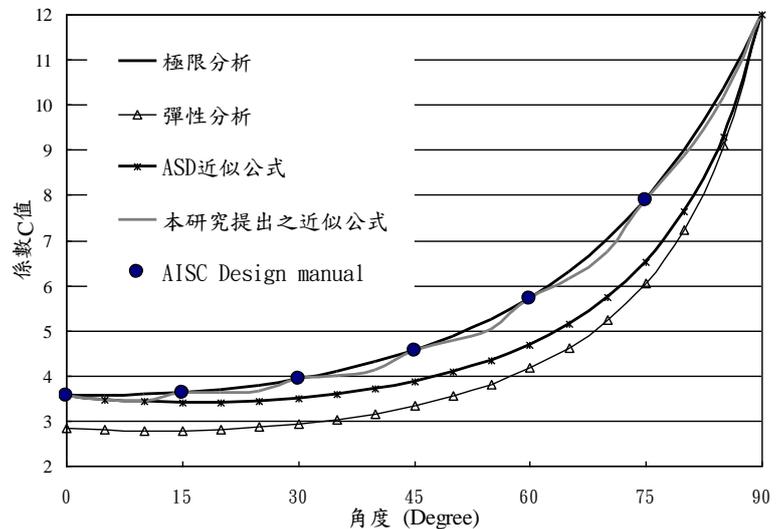
| 編號 | X | Y | h | v | d | D | R | R_h | R_v | $R \times d$ |
|------------|-----|----|-------|--------|--------|-------|--------|---------|--------|--------------|
| 1 | 0 | 0 | 0.453 | -8.904 | 8.916 | 0.283 | 20.889 | -20.863 | 1.061 | 186.243 |
| 2 | 0 | 3 | 0.453 | -5.904 | 5.921 | 0.188 | 19.719 | -19.662 | 1.508 | 116.767 |
| 3 | 0 | 6 | 0.453 | -2.904 | 2.939 | 0.093 | 16.408 | -16.212 | 2.528 | 48.227 |
| 4 | 0 | 9 | 0.453 | 0.096 | 0.463 | 0.015 | 7.228 | 1.497 | 7.071 | 3.345 |
| 6 | 0 | 15 | 0.453 | 6.096 | 6.113 | 0.194 | 19.834 | 19.780 | 1.469 | 121.240 |
| 7 | 5.5 | 0 | 5.953 | -8.904 | 10.711 | 0.340 | 21.200 | -17.625 | 11.783 | 227.072 |
| 8 | 5.5 | 3 | 5.953 | -5.904 | 8.384 | 0.266 | 20.757 | -14.617 | 14.737 | 174.028 |
| 9 | 5.5 | 6 | 5.953 | -2.904 | 6.623 | 0.210 | 20.106 | -8.816 | 18.071 | 133.173 |
| 11 | 5.5 | 12 | 5.953 | 3.096 | 6.710 | 0.213 | 20.148 | 9.296 | 17.875 | 135.187 |
| 12 | 5.5 | 15 | 5.953 | 6.096 | 8.520 | 0.270 | 20.793 | 14.876 | 14.527 | 177.162 |
| $\Sigma =$ | | | | | | | | -52.344 | 90.630 | 1322.444 |

表 4 不同方法分析所得之最大容許載重 (不規則螺栓排列)

| 方法 | 偏心載重以30度角作用螺栓斷面之最大容許載重P (kips) | 與最精確值誤差 (%) | C值 |
|---------|--------------------------------|-------------|-------|
| 彈性分析法 | 0.264 P (= 81.82) | -21.845 | 3.788 |
| 瞬時旋轉中心法 | 104.69 | - | 4.847 |

四、分析與討論

本研究分別將彈性分析法、瞬時中心分析法、AISC 設計手冊查表法、AISC/ASD 近似公式與本研究提出之近似公式之設計載重 P 除以螺栓的容許強度 (ϕr_n 或 r_n/Ω)，將螺栓斷面能承受之最大載重轉換成等同 AISC 設計手冊之查表係數 C 值 (除去螺栓強度與折減因子影響)，0



度至 90 度之比較如圖 9 所示。

圖 9 各分析方法之係數 C 值比較

圖 9 顯示彈性分析為最保守之方法，採用彈性分析相較於極限瞬時中心所分析出之誤差值低估超過 27%。AISC/ASD 所使用之近似公式雖誤差較彈性分析小，但由圖 9 顯示出小角度時採用 AISC/ASD 近似分析較於極限瞬時中心所分析出之值相近，於本示範例題中 15 度時誤差為低估 6%，然而 70 度時誤差則為將近 19%，由此可知使用 AISC/ASD 角度相對越大時其所估計之誤差也越大，因此規範於 AISC 近年來之設計手冊內不再沿用此公式。

採用彈性分析與 AISC/ASD 分析雖無安全上之疑慮卻也相對的不經濟，因此 AISC 設計手冊採用查表方法，提供 0 度、15 度、30 度、45 度、60 度與 75 度 6 個特定角度表格供查詢如圖 9 中 6 點所示。規範僅提供上述 6 個特定角度若是遇到其他角度，需使用原始的極限瞬時中心分析，先求得螺栓斷面之重心位置，接著再以試誤法根據力矩與力平衡之觀念配合螺栓幾何與偏心斜角載重相互關係之推算出極限瞬時中心，極限瞬時中心分析為準確的分析方法，但是卻會經過冗長的計算過程。

本研究依據公式(16)提供任何載重角度($0 \leq \theta \leq 360^\circ$)之 C 值供比較，分別將 0 度至 360 度之比較如表 1 所示。根據 AISC 規範所提供之 6 個角度查表值以直線內插方法求得介於規範所提供之 6 個角度內之值，因螺栓接合分析為曲線行為，若是採用直線內插時於小角度其值與極限瞬時中心分析相近，然而在面臨較大角度時則會出現超過 3% 不安全的誤差，如表 5 所示。

表 5 偏心載重之分析方法其載重角度與係數 C 值比較

| 角度 | 分析方法 | | | 極限 分析值 | 彈性 分析值 | AISC 規範 查表值 | 直線 內插值 | ASD 分析值 | 近似公式 分析值 |
|----|------|-----|-----|-----------|-----------|----------------|-----------|------------|-------------|
| | 0 | 180 | 360 | | | | | | |
| 0 | | | | 3.55 | 2.84 | 3.55 | 3.55 | 3.55 | 3.55 |
| 5 | 175 | 185 | 355 | 3.55 | 2.80 | - | 3.57 | 3.47 | 3.47 |
| 10 | 170 | 190 | 350 | 3.57 | 2.79 | - | 3.60 | 3.43 | 3.43 |
| 15 | 165 | 195 | 345 | 3.62 | 2.79 | 3.62 | 3.62 | 3.41 | 3.62 |
| 20 | 160 | 200 | 340 | 3.69 | 2.82 | - | 3.72 | 3.41 | 3.62 |
| 25 | 155 | 205 | 335 | 3.79 | 2.86 | - | 3.82 | 3.44 | 3.65 |
| 30 | 150 | 210 | 330 | 3.92 | 2.93 | 3.92 | 3.92 | 3.50 | 3.92 |
| 35 | 145 | 215 | 325 | 4.09 | 3.03 | - | 4.13 | 3.59 | 4.01 |
| 40 | 140 | 220 | 320 | 4.30 | 3.16 | - | 4.34 | 3.71 | 4.13 |
| 45 | 135 | 225 | 315 | 4.55 | 3.33 | 4.55 | 4.55 | 3.87 | 4.55 |
| 50 | 130 | 230 | 310 | 4.86 | 3.55 | - | 4.94 | 4.08 | 4.76 |
| 55 | 125 | 235 | 305 | 5.24 | 3.82 | - | 5.32 | 4.35 | 5.03 |
| 60 | 120 | 240 | 300 | 5.71 | 4.17 | 5.71 | 5.71 | 4.69 | 5.71 |

| | | | | | | | | | |
|----|-----|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 65 | 115 | 245 | 295 | 6.29 | 4.63 | - | 6.44 | 5.14 | 6.15 |
| 70 | 110 | 250 | 290 | 7.01 | 5.24 | - | 7.17 | 5.73 | 6.72 |
| 75 | 105 | 255 | 285 | 7.90 | 6.06 | 7.90 | 7.90 | 6.52 | 7.90 |
| 80 | 100 | 260 | 280 | 8.99 | 7.25 | - | 9.27 | 7.63 | 8.85 |
| 85 | 95 | 265 | 275 | 10.33 | 9.09 | - | 10.63 | 9.30 | 10.15 |
| 90 | | 270 | | 12.00 | 12.00 | 12.00 | 12 | 12.00 | 12.00 |

本研究有鑑上述原因提出近似公式整合規範與 AISC/ASD 近似公式之方法，根據規範提供之 6 個角度查表值可以推算出任何載重角度($0 \leq \theta \leq 360^\circ$) 之 C 值，由圖 9 可看出其誤差相對於彈性分析與 AISC/ASD 分析提供之公式誤差較小，屬於較為經濟之分析；相對於直線內插之不安全的高估，本研究近似方法相較於瞬時中心提供一套快速且安全之分析方法。

根據表 5 所示，本研究建議使用者在偏心載重角度較小時(45 度以內)，可採用直線內插方法，快速的取得參考 C 值，雖有高估卻仍在 3% 誤差內；若是偏心載重角度較大時(超過 45 度)，則採用本研究提供之近似方法，快速且安全求得其參考分析值 C。

五、結論

本研究關於螺栓接合分析方法之討論，發現 AISC 設計手冊內沒有提供彈性分析之查表方法，在某些斜角下表列值甚不合理；AISC 設計手冊沒有提供螺栓接合承受斜角偏心載重不是表列特定斜角時之解釋方法。針對工程師在使用 AISC 設計手冊處理樑柱螺栓接合可能面臨之上述問題，本研究對於螺栓接合可能面臨之上述問題，提出一套較為完整解決方法結論如下：

- (1) 根據彈性分析與極限分析，參考有關本主題之相關研究，比較 AISC 規範(ASD/LRFD) 有關本主題之處理方式，推導螺栓接合受彎矩及剪力同時作用之相關公式，提出一套比較完整之分析公式。本套分析公式基本上能夠處理各種螺栓接合之彈性、極限分析，本彈性、極限強度分析理論具有處理任意斜角($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) 偏心載重問題。
- (2) 本研究根據極限瞬時中心方法提出近似公式，可安全且快速的根據規範提供之值估算任意角度之偏心外力作用分析之值。
- (3) 本研究考慮螺栓幾何之影響，將任意螺栓幾何與偏心載重關係根據極限瞬時中心之複雜理論公式轉成數值公式，以為執行數值演算之依據。將極限與近似公式數值公式寫成電腦語言/程式，以執行複雜之試誤運算，完成快速、正確之工程要求。
- (4) 本研究成果將加強與補充現有 AISC 設計手冊之不足，讓工程師從此對螺栓接合強度的分析有所依據與遵行，從而提昇螺栓接合之分析與設計品質。

參考文獻

- [1] AISC, Design Specification for Structural Steel Buildings, 13th edition, American Institute of Steel Construction, Chicago, Illinois (2005).
- [2] AISC, Manual of Steel Construction, Load and Resistance Factor Design, 1st, 2nd, 3rd editions, American Institute of Steel Construction, Chicago, Illinois (1986,1993,1999).
- [3] AISC, Manual of Steel Construction, Allowable Stress Design, 9th edition, American Institute of Steel Construction, Chicago, Illinois (1989).
- [4] Brandt, G. Donald (1982), "Rapid determination of ultimate strength of eccentrically loaded bolted groups," Engineering Journal, AISC, 2nd Quarter, pp.94-100 (1982).
- [5] Iwankiw, N.R. " Design for eccentric and inclined loads on bolt and weld groups." Engineering Journal, AISC, 4th Quarter, pp.164-171 (1987).
- [6] Higgins, T.R., "Treatment of Eccentrically Loaded Connections in the AISC Manual," Engineering Journal, Vol.8, No. 2, pp. 52-54, AISC, Chicago, Illinois (1971).
- [7] Crawford, S.F. and G.L. Kulak, "Behavior of Eccentrically Loaded Bolted Connections," studies in Structural Engineering,(No.4), Department of Civil Engineering, Nova Scotia Technical College, Halifax, Nova Scotia (1968).
- [8] Crawford S.F. and Kulak G.L., "Eccentrically Loaded Bolted Connections," Journal of the Structural Division, ASCE 97 (No.ST3), pp.765-783 (1971).